

Arithmétique : nombres premiers et fractions irréductibles

I - Multiples, diviseurs et division euclidienne

Définition 1

Soient a et b deux nombres entiers, avec $a \neq 0$. Dire que a est un **diviseur** de b , c'est dire que b est un **multiple** de a : il existe un entier k tel que $b = k \times a$.

Remarque

Les deux mots décrivent la même situation, vue des deux côtés : $15 = 3 \times 5$ signifie à la fois que 3 est un diviseur de 15 et que 15 est un multiple de 3.

Exemples

- 3 est un diviseur de 15, car $15 = 3 \times 5$.
- 7 est un diviseur de 21, car $21 = 7 \times 3$.
- 1 est un diviseur de 43, car $43 = 1 \times 43$.
- 78 est un diviseur de 78, car $78 = 78 \times 1$.

Propriété 1

Tout entier n non nul admet au moins deux diviseurs : 1 et n .

Définition 2

Effectuer la **division euclidienne** d'un entier b par un entier $a \neq 0$, c'est trouver les deux entiers q (le **quotient**) et r (le **reste**) tels que

$$b = a \times q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < a.$$

$$\begin{array}{r|l}
 255 & 16 \\
 - 16 & 15 \\
 \hline
 95 & \\
 - 80 & \\
 \hline
 15 &
 \end{array}$$

Fig. 1. – La division euclidienne posée : le quotient au-dessous du diviseur, le reste en bas.

Propriété 2

a est un diviseur de b si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de b par a est nul.

Méthode 1 — Chercher tous les diviseurs d'un entier

1. Essayer les diviseurs 1, 2, 3, ... dans l'ordre croissant.
2. Chaque fois qu'un diviseur d convient, noter aussi le diviseur associé $n \div d$: les diviseurs vont par paires.
3. S'arrêter dès que $d \times d$ dépasse n : au-delà, on retrouverait les mêmes paires dans l'autre sens.

Exemple — Les diviseurs de 36

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6.$$

Comme $7 \times 7 = 49 > 36$, la recherche est terminée : les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

II - Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10

Propriétés — Critères de divisibilité

Divisible par	Critère	Exemples
2	le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8	174 175
3	la somme des chiffres est divisible par 3	174 $\rightarrow 1 + 7 + 4 = 12$ 175 $\rightarrow 1 + 7 + 5 = 13$
5	le chiffre des unités est 0 ou 5	175 174
9	la somme des chiffres est divisible par 9	549 $\rightarrow 5 + 4 + 9 = 18$ 174 $\rightarrow 1 + 7 + 4 = 12$
10	le chiffre des unités est 0	1 740 174

Remarque

Un nombre divisible par 9 est toujours divisible par 3, puisque $9 = 3 \times 3$; la réciproque est fautive, comme le montre 12. De même, un nombre divisible par 10 est divisible par 2 et par 5.

Exemple — Un nombre passé au crible des critères

Prenons 2 340 :

- il se termine par 0, donc il est divisible par 2, par 5 et par 10 ;
- $2 + 3 + 4 + 0 = 9$, donc il est divisible par 3 et par 9.

III - Nombres premiers

Définition 3

Un entier est **premier** s'il est supérieur ou égal à 2 et s'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même. Sinon, il est dit **composé**.

Remarque

1 n'est pas un nombre premier : il n'a qu'un seul diviseur, lui-même. Ce n'est pas un caprice de vocabulaire, mais la condition pour que la décomposition de la partie suivante soit unique.

Exemples

- 17 est premier : il ne s'écrit que 1×17 .
- 15 est composé : $15 = 3 \times 5$.
- 24 est composé : $24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$.

Protocole — Le crible d'Ératosthène

1. Écrire les entiers de 1 à 100 dans un tableau de dix colonnes.
2. Barrer 1, qui n'est pas premier.
3. Entourer 2, puis barrer tous les autres multiples de 2.
4. Recommencer avec le premier nombre non barré suivant : 3, puis 5, puis 7.
5. $11 \times 11 = 121 > 100$: tout ce qui reste est premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

les multiples de 2, 3, 5 et 7 sont barrés

Fig. 2. – Les multiples de 2, 3, 5 et 7 barrés ; il reste les nombres premiers.

Les 25 nombres premiers inférieurs à 100 sont à connaître :

Formule

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Méthode 2 — Décider si un nombre est premier

Essayer de le diviser par les nombres premiers successifs 2, 3, 5, 7, 11, ... et s'arrêter dès que le carré du diviseur essayé dépasse le nombre.

Exemple

131 est-il premier ? Il n'est divisible ni par 2 (il est impair), ni par 3 ($1 + 3 + 1 = 5$), ni par 5 (il ne finit ni par 0 ni par 5), ni par 7 ($131 = 7 \times 18 + 5$), ni par 11 ($131 = 11 \times 11 + 10$). Comme $13 \times 13 = 169 > 131$, la recherche s'arrête : 131 est premier.

IV - Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème 1 — Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier supérieur ou égal à 2 s'écrit comme un produit de nombres premiers, et cette écriture est **unique** à l'ordre des facteurs près.

Méthode 3 — Décomposer à la main

1. Diviser le nombre par le plus petit nombre premier qui le divise.
2. Recommencer avec le quotient obtenu.
3. S'arrêter quand le quotient vaut 1 : les diviseurs utilisés sont les facteurs premiers cherchés.

on divise par...	...un nombre premier
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

on s'arrête quand il reste 1

Fig. 3. – La décomposition de 360 posée en potence.

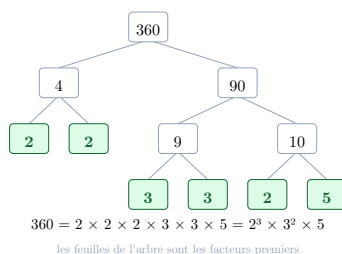


Fig. 4. – La même décomposition présentée en arbre : chaque nombre composé est cassé en deux facteurs.

Exemples

- $219 = 3 \times 73$
- $110 = 2 \times 5 \times 11$

- $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$
- $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

Notation

Un facteur répété s'écrit avec un exposant : $625 = 5^4$ et $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Protocole — Décomposer avec un tableur

1. En A1, écrire le nombre à décomposer.
2. En B1, écrire $=A1/2$, et recopier la formule vers le bas tant que le résultat est entier.
3. Changer de diviseur dès qu'un résultat n'est plus entier.
4. La fonction $=MOD(A1;2)$ donne le reste : elle vaut 0 exactement quand la division tombe juste.

Protocole — Décomposer avec un programme

Le même travail s'écrit avec une boucle :

d ← 2
tant que n > 1 :
...si le reste de n par d est 0 :
.....afficher d
.....n ← n / d
...sinon :
.....d ← d + 1

V - Fractions égales et fraction irréductible**Propriété 3**

Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie, ou quand on divise, son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}.$$

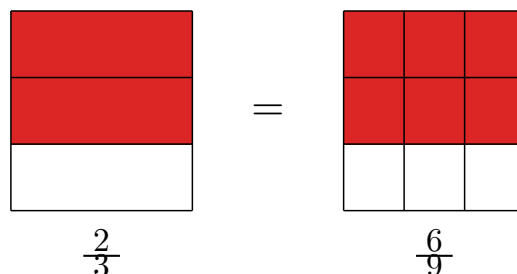


Fig. 5. — Deux écritures différentes d'une même fraction.

Définition 4

Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont plus aucun diviseur commun autre que 1 : elle ne peut plus être simplifiée.

Méthode 4 — Rendre une fraction irréductible

1. Décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.
2. Barrer les facteurs communs aux deux.
3. Effectuer les produits restants.

Exemple

$$\frac{66}{30} = \frac{2 \times 3 \times 11}{2 \times 3 \times 5} = \frac{11}{5}.$$

Comme 11 et 5 sont premiers, la fraction $\frac{11}{5}$ est irréductible.

Exemple

$$\frac{12}{51} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 17} = \frac{4}{17}.$$

Remarque

Les critères de divisibilité suffisent souvent : 12 et 51 ont leurs sommes de chiffres divisibles par 3, donc on peut diviser les deux par 3 sans décomposer complètement.

Propriété 4

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si, et seulement si, $a \times d = b \times c$.

Exemple

$$\frac{12}{18} \text{ et } \frac{26}{39} : 12 \times 39 = 468 \quad \text{et} \quad 18 \times 26 = 468,$$

donc ces deux fractions sont égales — elles valent toutes deux $\frac{2}{3}$.

VI - Problèmes de divisibilité**Exemple — Des engrenages**

Une roue de 12 dents engrène avec une roue de 18 dents ; un repère est tracé sur chacune, les deux repères se faisant face au départ.

On sait que

Les repères se retrouvent face à face lorsque le nombre de dents passées est à la fois un multiple de 12 et un multiple de 18.

Or

$36 = 12 \times 3 = 18 \times 2$, et aucun multiple commun plus petit n'existe.

Donc

La petite roue aura fait 3 tours, la grande 2 tours.

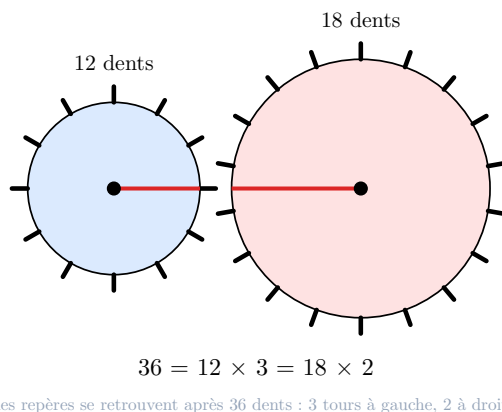


Fig. 6. – Deux roues engrenées : les repères se retrouvent après 36 dents.

Exemple — Une conjonction de phénomènes

Un phare émet un éclat toutes les 12 secondes, un autre toutes les 20 secondes ; ils viennent d'éclairer ensemble.

On sait que

Les éclats coïncident aux instants multiples de 12 et de 20.

Or

$12 = 2^2 \times 3$ et $20 = 2^2 \times 5$; le plus petit multiple commun est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Donc

Ils éclaireront de nouveau ensemble au bout d'une minute.

Exemple — Un partage

On veut répartir 84 crayons et 126 feutres en lots identiques, sans reste.

On sait que

Le nombre de lots doit être un diviseur commun de 84 et de 126.

Or

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$; leurs facteurs communs donnent $2 \times 3 \times 7 = 42$.

Donc

Au maximum 42 lots, de 2 crayons et 3 feutres chacun.