

# Triangle rectangle : Pythagore, racine carrée et trigonométrie

## I - Racine carrée d'un nombre

### Définition 1

Le **carré** d'un nombre est ce nombre multiplié par lui-même. Il se note avec un 2 en exposant :  
 $a^2 = a \times a$ .

### Définition 2

Soit  $a$  un nombre positif. La **racine carrée** de  $a$ , notée  $\sqrt{a}$ , est le nombre positif dont le carré vaut  $a$  :

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

### Remarque

Prendre la racine carrée est l'opération réciproque d'élever au carré, comme soustraire l'est d'additionner. Un nombre négatif n'a pas de racine carrée : aucun carré n'est négatif.

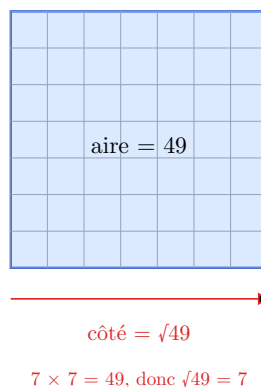


Fig. 1. – Un carré d'aire 49 a pour côté  $\sqrt{49} = 7$ .

### Exemples

- $\sqrt{144} = 12$ , car  $12 \times 12 = 144$ .
- $\sqrt{64} = 8$ , car  $8 \times 8 = 64$ .
- $\sqrt{2,25} = 1,5$ , car  $1,5 \times 1,5 = 2,25$ .
- $\sqrt{0} = 0$  et  $\sqrt{1} = 1$ .

Les carrés parfaits de 1 à 144 sont à connaître par cœur :

**Formule**

|   |   |   |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  | 11  | 12  |
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 |

**Définition 3**

Un nombre entier est un **carré parfait** lorsque sa racine carrée est un entier.

**Méthode 1 — Valeur exacte, valeur approchée**

Quand  $a$  n'est pas un carré parfait,  $\sqrt{a}$  ne s'écrit pas exactement avec des chiffres : on garde  $\sqrt{a}$  comme **valeur exacte**, et la calculatrice en donne une **valeur approchée**.

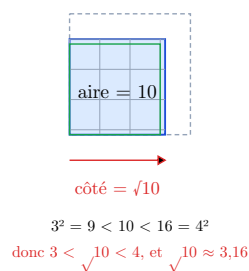


Fig. 2. –  $\sqrt{10}$  est coincé entre 3 et 4, puisque  $9 < 10 < 16$ .

**Exemple**

$3^2 = 9$  et  $4^2 = 16$  ; comme  $9 < 10 < 16$ , on a  $3 < \sqrt{10} < 4$ . La calculatrice affiche  $\sqrt{10} \approx 3,162$ .

Écrire  $\sqrt{10} = 3,16$  est faux : le signe  $\approx$  est obligatoire dès qu'on arrondit.

**II - Théorème de Pythagore****Définition 4**

Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit.

**Propriété 1**

L'hypoténuse est toujours le plus long des trois côtés.

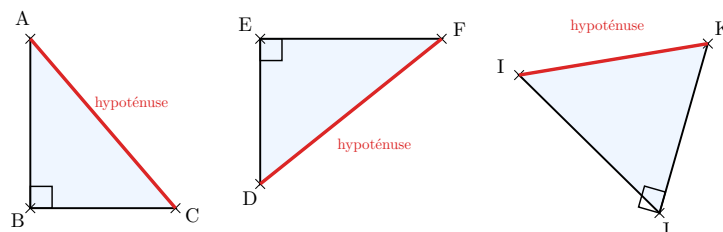


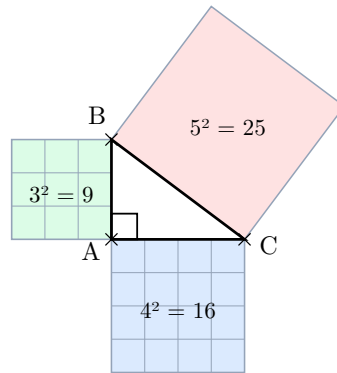
Fig. 3. – L'hypoténuse se lit sur la figure : c'est le côté qui fait face à l'angle droit, quelle que soit la position du triangle.

**Théorème 1 — Théorème de Pythagore**

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, si  $ABC$  est rectangle en  $A$ , alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

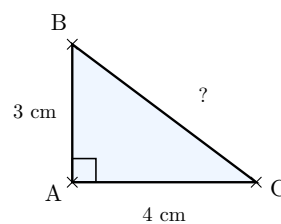


$$9 + 16 = 25$$

Fig. 4. – Sur un triangle rectangle de côtés 3 et 4 : les carrés construits sur les côtés de l'angle droit totalisent exactement le carré de l'hypoténuse.

### Méthode 2 — Calculer l'hypoténuse

1. Repérer l'angle droit, donc l'hypoténuse.
2. Écrire l'égalité de Pythagore.
3. Remplacer par les longueurs connues et calculer les carrés.
4. Prendre la racine carrée du résultat.



on cherche l'hypoténuse

Fig. 5. – Les deux côtés de l'angle droit sont connus : on cherche l'hypoténuse.

### Exemple — Chercher l'hypoténuse

#### On sait que

$ABC$  est rectangle en  $A$ , avec  $AB = 3$  cm et  $AC = 4$  cm.

#### Or

D'après le théorème de Pythagore,  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

Donc

$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$

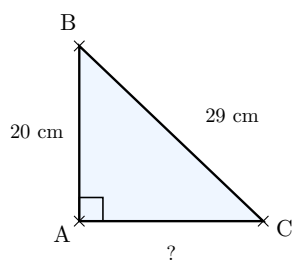
$$BC^2 = 9 + 16$$

$$BC^2 = 25$$

$$BC = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

**Méthode 3 — Calculer un côté de l'angle droit**

L'égalité s'écrit toujours dans le même sens, mais c'est une **soustraction** qui la résout : le carré cherché est celui de l'hypoténuse moins l'autre.



on cherche un côté de l'angle droit

Fig. 6. — L'hypoténuse et un côté de l'angle droit sont connus : on cherche le troisième côté.

**Exemple — Chercher un côté de l'angle droit**On sait que

$ABC$  est rectangle en  $A$ , avec  $BC = 29 \text{ cm}$  et  $AB = 20 \text{ cm}$ .

Or

D'après le théorème de Pythagore,  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

Donc

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = 29^2 - 20^2$$

$$AC^2 = 841 - 400$$

$$AC^2 = 441$$

$$AC = \sqrt{441} = 21 \text{ cm.}$$

**Remarque**

Le résultat n'est pas toujours entier. Pour  $AB = 5$  et  $AC = 7$  :  $BC^2 = 25 + 49 = 74$ , donc  $BC = \sqrt{74} \approx 8,6 \text{ cm}$ .

### III - Réciproque du théorème de Pythagore

#### Théorème 2 — Réciproque du théorème de Pythagore

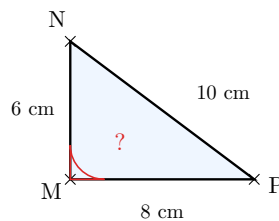
Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres, alors ce triangle est rectangle, et son angle droit est opposé au plus grand côté.

#### Remarque

Le théorème sert à calculer une longueur dans un triangle dont on **sait** qu'il est rectangle ; sa réciproque sert à démontrer qu'un triangle **est** rectangle. Ce ne sont pas les mêmes usages.

#### Méthode 4 — Déterminer la nature d'un triangle

1. Repérer le plus grand côté.
2. Calculer son carré d'un côté.
3. Calculer la somme des carrés des deux autres, de l'autre côté.
4. Comparer : égalité, le triangle est rectangle ; sinon, il ne l'est pas.



L'angle droit est à démontrer

Fig. 7. – Les trois longueurs sont connues : l'angle droit reste à démontrer.

#### Exemple — Un triangle rectangle

$MNP$  a pour côtés  $MN = 6$  cm,  $MP = 8$  cm et  $NP = 10$  cm.

#### On sait que

Le plus grand côté est  $[MP]$ .

#### Or

$$MP^2 = 10^2 = 100 \text{ et } MN^2 + MP^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100.$$

#### Donc

Ces deux résultats sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Pythagore,  $MNP$  est rectangle en  $N$ .

#### Exemple — Un triangle qui ne l'est pas

$RST$  a pour côtés  $RS = 5$  cm,  $ST = 6$  cm et  $RT = 8$  cm.

On sait que

Le plus grand côté est  $[RT]$ .

Or

$RT^2 = 64$ , tandis que  $RS^2 + ST^2 = 25 + 36 = 61$ .

Donc

$64 \neq 61$  : le triangle  $RST$  n'est pas rectangle.

## IV - Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Le théorème de Pythagore relie les trois longueurs d'un triangle rectangle. La trigonométrie, elle, relie les longueurs aux **angles**.

### Définitions

Dans un triangle rectangle, chaque angle aigu détermine trois côtés :

- l'**hypoténuse**, toujours la même, opposée à l'angle droit ;
- le **côté adjacent** à l'angle, celui qui le borde ;
- le **côté opposé** à l'angle, celui qui lui fait face.

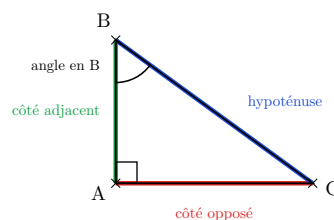


Fig. 8. – Les trois côtés vus depuis l'angle en  $B$ .

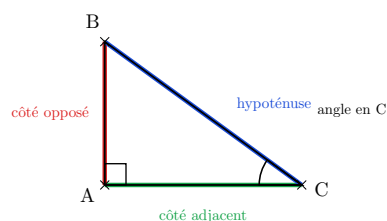


Fig. 9. – La même figure vue depuis l'angle en  $C$  : adjacent et opposé ont échangé leurs rôles.

« **Adjacent** » et « **opposé** » ne sont pas des propriétés du côté, mais du couple formé par le côté et l'angle choisi.

**Définitions**

Soit  $x$  un angle aigu d'un triangle rectangle. On pose

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \sin x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

**Méthode 5 — Retenir les trois quotients**

Le moyen mnémotechnique usuel se lit en trois syllabes : **CAH** — **SOH** — **TOA**, soit  $\text{Cosinus} = \text{Adjacent} / \text{Hypoténuse}$ ,  $\text{Sinus} = \text{Opposé} / \text{Hypoténuse}$ ,  $\text{Tangente} = \text{Opposé} / \text{Adjacent}$ .

**Propriétés**

Pour tout angle aigu  $x$  :

$$0 < \cos x < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \sin x < 1.$$

Un cosinus supérieur à 1 signale une erreur de calcul.

**Remarque**

Ces trois nombres ne dépendent que de la mesure de l'angle, pas de la taille du triangle : deux triangles rectangles ayant le même angle aigu ont les mêmes cosinus, sinus et tangente.

**V - Calculer une longueur, calculer une mesure d'angle****Méthode 6 — Choisir la bonne ligne trigonométrique**

1. Repérer l'angle sur lequel on travaille, et nommer les trois côtés relativement à lui.
2. Entourer les deux côtés qui interviennent : celui qu'on connaît et celui qu'on cherche.
3. Choisir le quotient qui met en jeu exactement ces deux côtés.

**Exemple — Calculer une longueur**

Dans  $ABC$  rectangle en  $A$ , on donne  $BC = 7$  cm et  $\widehat{ABC} = 40^\circ$ . On cherche  $AB$ .

**On sait que**

Vu de l'angle en  $B$ ,  $[AB]$  est le côté adjacent et  $[BC]$  l'hypoténuse.

**Or**

$$\cos 40^\circ = \frac{AB}{BC}.$$

**Donc**

$$AB = 7 \times \cos 40^\circ \approx 5,4 \text{ cm.}$$

**Exemple — Calculer une mesure d'angle**

Dans  $ABC$  rectangle en  $A$ , on donne  $AB = 3$  cm et  $BC = 5$  cm. On cherche la mesure de l'angle en  $B$ .

**On sait que**

$[AB]$  est le côté adjacent à cet angle,  $[BC]$  est l'hypoténuse.

**Or**

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

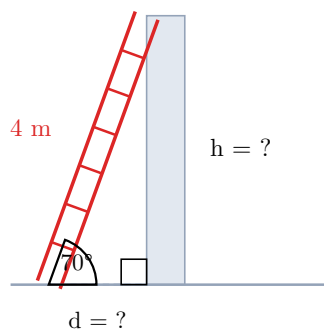
**Donc**

La touche  $\cos^{-1}$  de la calculatrice donne  $\widehat{ABC} \approx 53^\circ$ .

**Protocole — Sur la calculatrice**

1. Vérifier que la calculatrice est en mode degré (DEG à l'écran).
2. Pour une longueur : utiliser les touches  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\tan$ .
3. Pour un angle : utiliser les touches  $\cos^{-1}$ ,  $\sin^{-1}$ ,  $\tan^{-1}$ , souvent accessibles avec la touche 2nde.

## VI - Problèmes mêlant Pythagore et trigonométrie



$$\sin 70^\circ = h \div 4 \text{ et } \cos 70^\circ = d \div 4$$

Fig. 10. – Une échelle de 4 m appuyée contre un mur, faisant un angle de  $70^\circ$  avec le sol.

**Exemple — L'échelle****On sait que**

Le triangle formé par le sol, le mur et l'échelle est rectangle ; l'échelle en est l'hypoténuse.

**Or**

$$\sin 70^\circ = \frac{h}{4} \text{ et } \cos 70^\circ = \frac{d}{4}.$$

**Donc**

La hauteur atteinte est  $h = 4 \times \sin 70^\circ \approx 3,8$  m, et le pied de l'échelle est à  $d = 4 \times \cos 70^\circ \approx 1,4$  m du mur.

**Remarque**

Le contrôle de vraisemblance est immédiat : la hauteur atteinte doit être inférieure à la longueur de l'échelle. Une valeur supérieure à 4 m signalerait une erreur de touche.

**Exemple — La diagonale d'un rectangle**

Un écran rectangulaire mesure 60 cm sur 34 cm.

**On sait que**

La diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 60 et 34.

**Or**

$$d^2 = 60^2 + 34^2 = 3600 + 1156 = 4756.$$

**Donc**

$$d = \sqrt{4756} \approx 69 \text{ cm, soit environ 27 pouces.}$$

**Exemple — Une rampe d'accès**

Une rampe doit franchir une marche de 12 cm de haut avec une pente d'au plus  $5^\circ$ .

**On sait que**

La hauteur est le côté opposé à l'angle de pente, la longueur de la rampe en est l'hypoténuse.

**Or**

$$\sin 5^\circ = \frac{12}{L}, \text{ donc } L = \frac{12}{\sin 5^\circ}.$$

**Donc**

$$L \approx 138 \text{ cm : il faut une rampe d'au moins 1,38 m.}$$

**Méthode 7 — Rédiger une résolution**

Toute réponse s'appuie sur trois temps : ce qu'on sait de la figure, la propriété invoquée, puis la conclusion chiffrée avec son unité. Les valeurs approchées gardent le signe  $\approx$  et un arrondi annoncé.