

# Calcul littéral : double distributivité et identités remarquables

---

## I - Structure d'une expression : somme ou produit

### Définition 1

La **structure** d'une expression littérale, c'est la dernière opération qu'on effectuerait pour la calculer : une expression est une **somme** ou un **produit**.

### Méthode 1 — Reconnaître la structure

1. Repérer les parenthèses : ce qu'elles contiennent forme un bloc.
2. Chercher, hors des parenthèses, l'opération de plus faible priorité.
3. Une addition ou une soustraction hors parenthèses : c'est une somme. Sinon, c'est un produit.

### Exemples

- $3x + 5$  est une somme de deux termes :  $3x$  et  $5$ .
- $3(x + 5)$  est un produit de deux facteurs :  $3$  et  $(x + 5)$ .
- $(x + 2)(x - 7)$  est un produit.
- $(x + 2) + x^2$  est une somme.
- $2x^2 - 5x + 1$  est une somme de trois termes.

### Remarque

Cette lecture commande tout le chapitre : **développer**, c'est transformer un produit en somme ; **factoriser**, c'est transformer une somme en produit.

### Définition 2

**Réduire** une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes possible, en regroupant les **termes semblables** — ceux qui ont la même partie littérale.

### Exemples

- $5x + 3x = 8x$
- $7x^2 - 2x^2 = 5x^2$
- $4x + 3 + 2x - 8 = 6x - 5$
- $3x + 2x^2$  ne se réduit pas :  $x$  et  $x^2$  ne sont pas semblables.

### Convention

On n'écrit ni le signe  $\times$  devant une lettre ou une parenthèse, ni le coefficient 1 :  $3 \times x$  s'écrit  $3x$ , et  $1 \times x$  s'écrit  $x$ .

## II - Opposé d'une expression littérale

### Définition 3

L'**opposé** d'une expression  $A$  est l'expression  $-A$ , celle qu'il faut lui ajouter pour obtenir 0.

### Propriété 1

L'opposé d'une somme s'obtient en changeant le signe de **chaque** terme :

$$-(a + b) = -a - b \quad \text{et} \quad -(a - b) = -a + b.$$

### Exemples

- L'opposé de  $3x + 5$  est  $-3x - 5$ .
- L'opposé de  $2x - 7$  est  $-2x + 7$ .
- L'opposé de  $-x^2 + 4x - 1$  est  $x^2 - 4x + 1$ .

L'erreur la plus fréquente du chapitre consiste à ne changer que le premier signe :  $-(2x - 7)$  vaut  $-2x + 7$ , jamais  $-2x - 7$ .

### Exemple — Supprimer une parenthèse précédée d'un moins

$$3(2x + 1) - (6 - x) = 6x + 3 - 6 + x = 7x - 3.$$

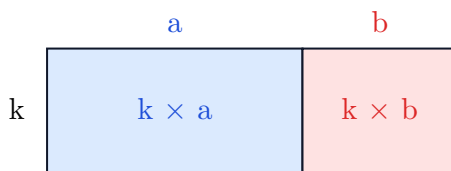
## III - Simple distributivité : développer et factoriser

### Propriété 2 — Simple distributivité

Pour tous nombres  $k$ ,  $a$  et  $b$  :

$$k(a + b) = ka + kb \quad \text{et} \quad k(a - b) = ka - kb.$$

Lue de gauche à droite, l'égalité **développe** ; lue de droite à gauche, elle **factorise**.



$$k(a + b) = ka + kb$$

Fig. 1. — Le rectangle de largeur  $k$  et de longueur  $a + b$  se coupe en deux : son aire s'écrit des deux façons.

### Exemples — Développer

- $5(x + 3) = 5x + 15$

- $-4x(6 - 3x) = -24x + 12x^2$
- $3(2x + 1) - 2(x - 4) = 6x + 3 - 2x + 8 = 4x + 11$

### **Méthode 2 — Factoriser avec un facteur commun**

1. Repérer le facteur commun à tous les termes de la somme.
2. L'écrire devant une parenthèse.
3. Dans la parenthèse, écrire ce qui reste de chaque terme.

### **Exemples — Factoriser**

- $6x + 15 = 3(2x + 5)$
- $x^2 - 7x = x(x - 7)$
- $(x + 1)(x + 4) + (x + 1)(2x - 3) = (x + 1)(3x + 1)$ , le facteur commun étant la parenthèse  $(x + 1)$ .

## **IV - Double distributivité**

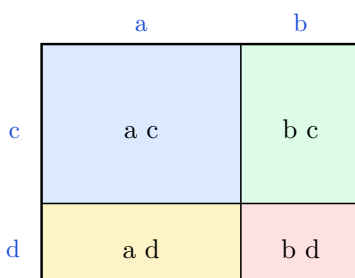
### **Propriété 3 — Double distributivité**

Pour tous nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

### **Pour mieux comprendre**

Chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde : il y a donc toujours **quatre** produits à écrire avant de réduire.



$$(a + b)(c + d) = a c + a d + b c + b d$$

Fig. 2. — Le rectangle de dimensions  $a + b$  et  $c + d$  se découpe en quatre : une aire par produit.

### **Exemples**

- $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$
- $(2x - 3)(5x + 7) = 10x^2 + 14x - 15x - 21 = 10x^2 - x - 21$
- $(x - 4)(x - 1) = x^2 - x - 4x + 4 = x^2 - 5x + 4$

### Méthode 3 — Contrôler un développement

Remplacer  $x$  par un nombre simple, par exemple 1 ou 2, dans l'expression de départ et dans le résultat : les deux valeurs doivent coïncider.

### Exemple

Pour  $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$ , prenons  $x = 1$  : à gauche  $3 \times 6 = 18$ , à droite  $1 + 7 + 10 = 18$  cohérent.

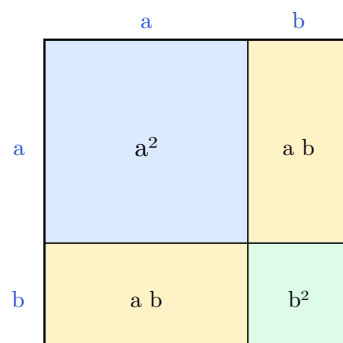
## V - Identités remarquables

### Formules — Les trois identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

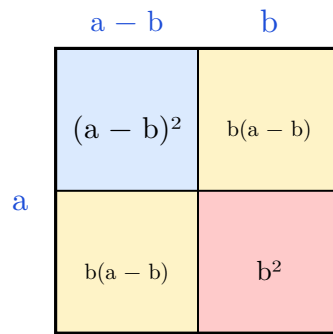
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



$$(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2$$

Fig. 3. —  $(a + b)^2$  : le carré de côté  $a + b$  contient  $a^2$ ,  $b^2$  et deux rectangles  $ab$ .



$$a^2 = (a - b)^2 + 2 b(a - b) + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 a b + b^2$$

Fig. 4. —  $(a - b)^2$  : ce qui reste du carré de côté  $a$  quand on retire deux bandes — le coin  $b^2$ , retiré deux fois, doit être rajouté.

$(a + b)^2$  n'est pas  $a^2 + b^2$  : le double produit  $2ab$  manque. Pour  $a = 3$  et  $b = 4$  :  $(3 + 4)^2 = 49$ , alors que  $9 + 16 = 25$ .

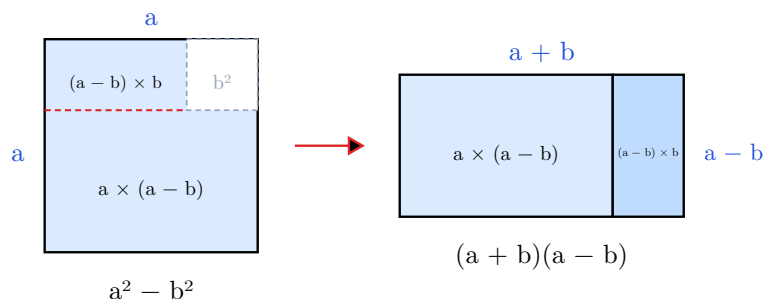
#### Exemples — Développer

- $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$
- $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
- $(x + 6)(x - 6) = x^2 - 36$
- $(2x - 5)(2x + 5) = 4x^2 - 25$

#### Remarque

La troisième identité fait disparaître le terme en  $x$  : c'est la seule dont le développement n'a que deux termes.

## VI - Factoriser une expression de la forme $a^2 - b^2$



$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Fig. 5. — L'équerre  $a^2 - b^2$ , recoupée puis recollée, forme le rectangle  $(a + b)(a - b)$ .

#### Méthode 4 — Reconnaître une différence de deux carrés

1. Vérifier que l'expression est une **soustraction**.
2. Écrire chacun des deux termes comme un carré :  $a^2$  et  $b^2$ .
3. Appliquer  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ .

**Exemples**

- $x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x + 8)(x - 8)$
- $4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2 = (2x + 7)(2x - 7)$
- $25 - x^2 = 5^2 - x^2 = (5 + x)(5 - x)$
- $(x + 1)^2 - 9 = (x + 1)^2 - 3^2 = (x + 4)(x - 2)$

**Remarque**

Une **somme** de deux carrés, comme  $x^2 + 9$ , ne se factorise pas de cette façon.

**VII - Démontrer par le calcul littéral**

Une vérification sur quelques nombres ne prouve rien : la lettre, elle, représente tous les nombres à la fois. C'est ce qui fait du calcul littéral un outil de démonstration.

**Méthode 5 — Démontrer une propriété générale**

1. Nommer par une lettre le nombre quelconque de l'énoncé.
2. Traduire l'énoncé par une expression.
3. Développer, réduire, factoriser jusqu'à faire apparaître la forme annoncée.

**Exemple — La somme de trois entiers consécutifs****On sait que**

Trois entiers consécutifs s'écrivent  $n - 1$ ,  $n$  et  $n + 1$ , où  $n$  est un entier.

**Or**

Leur somme vaut  $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$ .

**Donc**

Cette somme est toujours un multiple de 3.

**Exemple — La différence des carrés de deux entiers consécutifs****On sait que**

Deux entiers consécutifs s'écrivent  $n$  et  $n + 1$ .

**Or**

$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ .

**Donc**

Cette différence est toujours un nombre impair — et c'est même la somme des deux entiers.

**Méthode 6 — Démontrer l'équivalence de deux programmes de calcul**

1. Choisir une lettre pour le nombre de départ, la même pour les deux programmes.
2. Traduire chaque programme par une expression.
3. Développer et réduire les deux : si l'on obtient la même expression, les programmes donnent toujours le même résultat.

**Exemple — Deux programmes**

| Programme A                   | Programme B            |
|-------------------------------|------------------------|
| Choisir un nombre.            | Choisir un nombre.     |
| Lui ajouter 3.                | Le multiplier par 2.   |
| Multiplier le résultat par 2. | Ajouter 8 au résultat. |
| Soustraire 2.                 |                        |

**On sait que**

Soit  $x$  le nombre choisi.

**Or**

Le programme A donne  $2(x + 3) - 2 = 2x + 6 - 2 = 2x + 4$ , et le programme B donne  $2x + 8$ .

**Donc**

$2x + 4 \neq 2x + 8$  : les deux programmes ne donnent jamais le même résultat, ils diffèrent toujours de 4.

**Exemple — Deux programmes équivalents**

Programme C : choisir  $x$ , l'augmenter de 5, élever au carré, retrancher 25.

Programme D : choisir  $x$ , l'élever au carré, ajouter 10 fois le nombre choisi.

**On sait que**

C donne  $(x + 5)^2 - 25$  et D donne  $x^2 + 10x$ .

**Or**

$(x + 5)^2 - 25 = x^2 + 10x + 25 - 25 = x^2 + 10x$ .

**Donc**

Les deux programmes sont équivalents : ils donnent le même résultat pour tout nombre choisi.