

Équations, équations produits et équation $x^2 = a$

I - Mettre un problème en équation

Définitions

Une **équation** est une égalité contenant une lettre, appelée l'**inconnue**. Une **solution** est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie ; **résoudre** l'équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Méthode 1 — Tester si un nombre est solution

1. Calculer séparément le membre de gauche et le membre de droite en remplaçant l'inconnue par ce nombre.
2. Comparer les deux résultats : égaux, le nombre est solution ; différents, il ne l'est pas.

Exemple

L'équation $5x - 3 = 2x + 6$.

- Pour $x = 3$: à gauche $5 \times 3 - 3 = 12$, à droite $2 \times 3 + 6 = 12$ égaux, donc 3 est solution.
- Pour $x = 1$: à gauche 2, à droite 8 différents, donc 1 n'est pas solution.

Méthode 2 — Mettre un problème en équation

1. Choisir l'inconnue, la nommer et préciser ce qu'elle représente avec son unité.
2. Traduire l'énoncé par une égalité entre deux expressions.
3. Résoudre l'équation.
4. Revenir à la question posée, et contrôler la vraisemblance.

Exemple — Un périmètre

Un rectangle a une longueur qui dépasse sa largeur de 4 cm, et un périmètre de 36 cm.

Soit x la largeur, en centimètres. La longueur vaut $x + 4$, et le périmètre $2(x + x + 4) = 36$, soit $4x + 8 = 36$.

II - Résolution algébrique d'une équation du premier degré

Propriété 1 — Règles de transformation

Une équation garde les mêmes solutions lorsqu'on :

- ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres ;
- multiplie ou divise les deux membres par un même nombre non nul.

Pour mieux comprendre

Une équation est une balance en équilibre : tant qu'on agit de la même façon des deux côtés, l'équilibre est conservé.

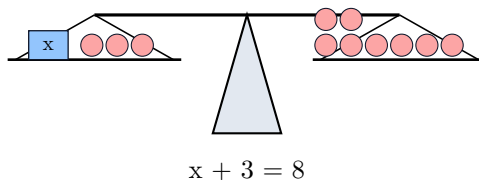


Fig. 1. – Les deux plateaux se valent : c'est ce que dit le signe $=$.

Méthode 3 — Résoudre $a x + b = c x + d$

1. Développer et réduire chaque membre s'il y a des parenthèses.
2. Rassembler les termes en x dans un membre, les nombres dans l'autre.
3. Réduire les deux membres.
4. Diviser par le coefficient de x .
5. Vérifier la solution dans l'équation de départ.

Exemple — Une résolution complète

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 2x + 6 \\ 5x - 2x - 3 &= 6 \\ 3x &= 6 + 3 \\ 3x &= 9 \\ x &= \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

Vérification : $5 \times 3 - 3 = 12$ et $2 \times 3 + 6 = 12$ cohérent. L'équation a une seule solution : 3.

Exemple — Avec des parenthèses

$$\begin{aligned} 3(2x + 1) - (6 - x) &= 15 \\ 6x + 3 - 6 + x &= 15 \\ 7x - 3 &= 15 \\ 7x &= 18 \\ x &= \frac{18}{7} \end{aligned}$$

La solution n'est pas entière : on la laisse en écriture fractionnaire.

Remarque

Une équation du premier degré peut n'avoir aucune solution ($x + 1 = x + 2$) ou en avoir une infinité ($2(x + 1) = 2x + 2$). Dans les deux cas, les termes en x disparaissent au cours de la résolution.

III - Équations produits

Propriété 2 — Annulation d'un produit

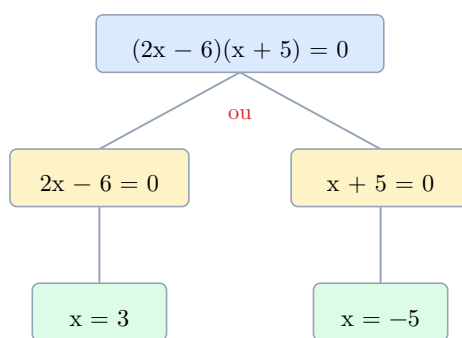
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \text{ équivaut à } A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Cette propriété n'a pas d'équivalent pour une autre valeur : de $A \times B = 12$, on ne peut rien conclure sur A ni sur B .

Définition 1

Une **équation produit** est une équation dont un membre est un produit de facteurs du premier degré, et l'autre membre 0.



deux solutions : 3 et -5

Fig. 2. — L'équation se casse en deux équations du premier degré, chacune donnant une solution.

Méthode 4 — Résoudre une équation produit

1. Vérifier que l'équation est bien de la forme « produit = 0 ».
2. Écrire que le premier facteur est nul **ou** que le second l'est.
3. Résoudre chacune de ces équations.
4. Conclure en donnant toutes les solutions.

Exemple

$$(2x - 6)(x + 5) = 0$$

On sait que

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

Donc

$2x - 6 = 0$ ou $x + 5 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x = -5$.

L'équation a deux solutions : 3 et -5.

Méthode 5 — Se ramener à une équation produit

Lorsque l'équation n'est pas donnée sous forme de produit, il faut d'abord tout ramener dans un membre, puis **factoriser** — souvent grâce à l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Exemple — Par une différence de deux carrés

$$x^2 - 49 = 0$$

$$(x + 7)(x - 7) = 0$$

donc $x = -7$ ou $x = 7$.

Exemple — Avec un facteur commun

$$(x - 2)(3x + 1) + (x - 2)(x - 4) = 0$$

$$(x - 2)(3x + 1 + x - 4) = 0$$

$$(x - 2)(4x - 3) = 0$$

donc $x = 2$ ou $x = \frac{3}{4}$.

IV - Équations de la forme $x^2 = a$

Propriété 3

Soit a un nombre. L'équation $x^2 = a$:

- n'a aucune solution si $a < 0$;
- a une seule solution, 0, si $a = 0$;
- a deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, si $a > 0$.

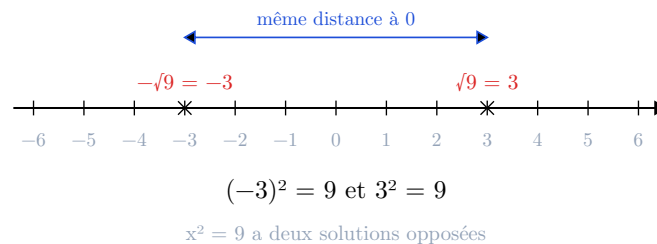


Fig. 3. — Deux nombres opposés ont le même carré : les solutions sont symétriques par rapport à 0.

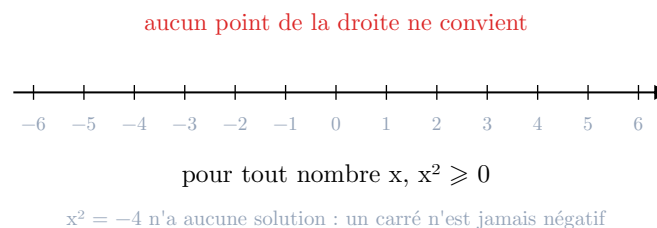


Fig. 4. — Un carré n'étant jamais négatif, l'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution.

Oublier la solution négative est l'erreur classique : $x^2 = 9$ a deux solutions, 3 et -3, et non la seule 3.

Exemples

- $x^2 = 25$ a pour solutions 5 et -5 .
- $x^2 = 7$ a pour solutions $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$, soit environ 2,65 et $-2,65$.
- $x^2 = -1$ n'a pas de solution.
- $4x^2 = 36$ s'écrit $x^2 = 9$: les solutions sont 3 et -3 .

Remarque

On peut aussi passer par une équation produit : $x^2 = 25$ donne $x^2 - 25 = 0$, soit $(x + 5)(x - 5) = 0$. Les deux méthodes donnent évidemment le même résultat.

V - Résoudre des problèmes**Exemple — Un problème de périmètre****On sait que**

Soit x la largeur du rectangle, en centimètres : le périmètre s'écrit $4x + 8 = 36$.

Or

$4x = 28$, donc $x = 7$.

Donc

La largeur vaut 7 cm et la longueur 11 cm. Vérification : $2 \times (7 + 11) = 36$ cohérent.

Exemple — Un problème d'aire

Quel est le côté d'un carré d'aire 144 cm^2 ?

On sait que

Soit c le côté, en centimètres : $c^2 = 144$.

Or

Les solutions de cette équation sont 12 et -12 .

Donc

Une longueur étant positive, le côté mesure 12 cm. La solution négative est écartée par le contexte, non par le calcul.

Résoudre une équation et répondre à un problème sont deux choses différentes : certaines solutions de l'équation peuvent être impossibles dans la situation décrite.

Exemple — Un problème de tarifs

Un club propose deux formules : 120 € d'abonnement puis 2 € la séance, ou 5 € la séance sans abonnement. À partir de combien de séances la première est-elle plus avantageuse ?

On sait que

Soit n le nombre de séances : les deux formules coutent le même prix lorsque $120 + 2n = 5n$.

Or

$120 = 3n$, donc $n = 40$.

Donc

Au-delà de 40 séances, l'abonnement devient plus avantageux.

Exemple — Un problème de physique

Un objet lâché sans vitesse tombe d'une hauteur $h = 5t^2$ mètres au bout de t secondes. Au bout de combien de temps a-t-il chuté de 45 m ?

On sait que

$5t^2 = 45$, donc $t^2 = 9$.

Or

Les solutions sont 3 et -3 .

Donc

Une durée étant positive, la chute dure 3 secondes.