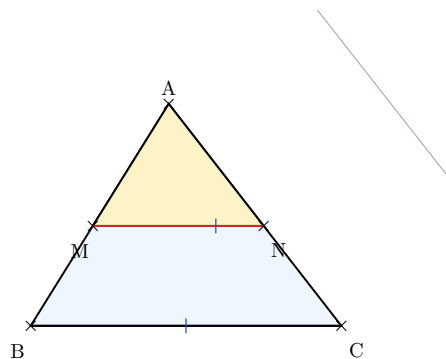


Théorème de Thalès et triangles semblables

I - Le théorème de Thalès dans les triangles emboîtés

Deux droites sécantes coupées par deux parallèles forment une configuration où toutes les longueurs sont proportionnelles. C'est le contenu du théorème de Thalès.



triangles emboîtés

Fig. 1. – Les points M et N sont du même côté de A : les triangles AMN et ABC sont emboîtés.

Théorème 1 — Théorème de Thalès

Soient deux droites sécantes en A . Soient B et M sur la première, C et N sur la seconde, tous distincts de A .

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Les deux premiers quotients se lisent sur la figure : c'est la même fraction du chemin parcouru sur chacune des deux droites. Le troisième quotient, celui des segments parallèles, ne se lit pas de la même façon — il se démontre.

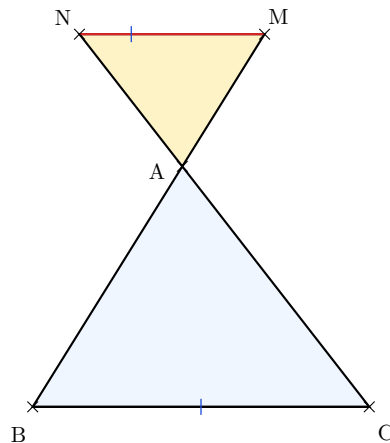
Méthode 1 — Écrire correctement les trois quotients

1. Repérer le sommet commun A .
2. Sur chaque numérateur, mettre la longueur du **petit** triangle ; au dénominateur, celle du **grand**.
3. Vérifier que chaque quotient met en jeu deux points alignés avec A , sauf le troisième, formé des deux segments parallèles.

Remarque

L'ordre des lettres est le garde-fou : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ commencent tous deux par A , et les points M et B sont sur la même droite, comme N et C .

II - La configuration papillon et la réciproque



configuration « papillon »

Fig. 2. – Les points M et N sont de l'autre côté de A : la figure prend la forme d'un papillon, mais le théorème s'énonce exactement de la même façon.

Propriété 1

Le théorème de Thalès s'applique à l'identique dans la configuration papillon : seule change la position des points sur les droites, pas l'égalité des quotients.

Théorème 2 — Réciproque du théorème de Thalès

Soient deux droites sécantes en A , avec B et M sur la première, C et N sur la seconde.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, et si les points A, M, B d'une part, A, N, C d'autre part, sont dans le même ordre, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

La condition sur l'ordre des points est indispensable : sans elle, on pourrait conclure au parallélisme à partir d'une figure où M est du côté de A et N de l'autre.

Méthode 2 — Démontrer que deux droites sont parallèles

1. Vérifier l'alignement et l'ordre des points.
2. Calculer séparément les deux quotients, en écriture décimale ou fractionnaire.
3. Les comparer : égaux, les droites sont parallèles ; différents, elles ne le sont pas.

Exemple — Deux droites parallèles

$AM = 3$, $AB = 5$, $AN = 4,2$, $AC = 7$, les points étant dans le même ordre.

On sait que

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{4,2}{7} = 0,6.$$

Or

Ces quotients sont égaux et les points sont dans le même ordre.

Donc

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple — Deux droites non parallèles

$$AM = 3, AB = 5, AN = 4, AC = 7.$$

On sait que

$$\frac{3}{5} = 0,6 \text{ et } \frac{4}{7} \approx 0,571.$$

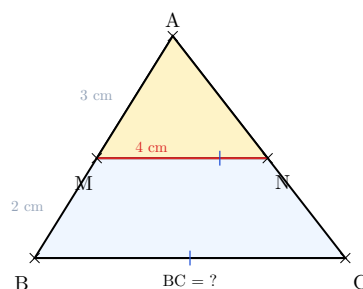
Or

Ces deux quotients sont différents.

Donc

Les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles. Le théorème de Thalès ne s'applique donc pas à cette figure.

III - Calculs de longueurs



triangles emboîtés

Fig. 3. — $AM = 3$ cm, $MB = 2$ cm et $MN = 4$ cm : le théorème de Thalès donne BC .

Méthode 3 — Calculer une longueur avec le théorème de Thalès

1. Vérifier les hypothèses : deux droites sécantes, deux droites parallèles.
2. Écrire la chaîne des trois quotients.
3. Ne garder que les deux quotients où figure la longueur cherchée.
4. Résoudre l'égalité obtenue par le produit en croix.

Exemple — Calculer \$B C\$On sait que

AMN et ABC sont dans une configuration de Thalès, avec (MN) parallèle à (BC) ; $AM = 3$ cm, $AB = 3 + 2 = 5$ cm et $MN = 4$ cm.

Or

D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{3}{5} = \frac{4}{BC}$.

Donc

$$BC = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ cm.}$$

Remarque

L'attention porte sur la longueur AB , qui vaut 5 cm et non 2 cm : la figure donne MB , mais le théorème demande AB .

Exemple — Un calcul dans la configuration papillon

$AM = 4$, $AB = 6$, $MN = 5$. En papillon comme en emboîtés, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, donc $BC = \frac{6 \times 5}{4} = 7,5$.

Méthode 4 — Mesurer l'inaccessible

La configuration de Thalès permet de calculer une longueur qu'aucun instrument n'atteint : hauteur d'un arbre à partir de son ombre, largeur d'une rivière, distance d'un bâtiment. Il suffit de reconnaître deux droites sécantes coupées par deux parallèles.

Exemple — La hauteur d'un arbre

Un piquet de 1,5 m projette une ombre de 2 m au moment où un arbre en projette une de 16 m.

On sait que

Les rayons du soleil sont parallèles : le piquet et l'arbre forment deux triangles emboîtés de même sommet.

Or

$$\frac{h}{1,5} = \frac{16}{2}.$$

Donc

$$h = 1,5 \times 8 = 12 \text{ m.}$$

IV - Triangles semblables**Définition 1**

Deux triangles sont **semblables** lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Propriété 2 — Propriété caractéristique

Deux triangles sont semblables si, et seulement si, les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.

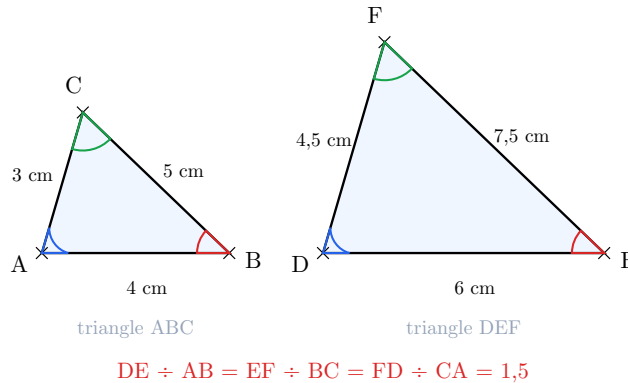


Fig. 4. – DEF est un agrandissement de ABC de rapport 1,5 : mêmes angles, longueurs proportionnelles.

Définition 2

Le **rapport de similitude** est le coefficient de proportionnalité entre les longueurs des deux triangles.

Remarque

Deux triangles semblables ont la même forme mais pas nécessairement la même taille. Quand le rapport vaut 1, ils sont superposables : ils sont alors **isométriques**.

Propriété 3

Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° , il suffit que **deux** angles soient deux à deux égaux pour que les triangles soient semblables : le troisième l'est alors automatiquement.

V - Démontrer que deux triangles sont semblables

Méthode 5 — Deux voies de démonstration

- Par les **angles** : montrer que deux angles de l'un ont la même mesure que deux angles de l'autre.
- Par les **longueurs** : montrer que les trois quotients des côtés correspondants sont égaux.

Exemple — Par les angles

Dans une configuration de Thalès, (MN) étant parallèle à (BC) :

On sait que

Les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Or

Deux angles correspondants formés par des droites parallèles ont la même mesure ; l'angle en A est commun aux deux triangles.

Donc

Les triangles AMN et ABC sont semblables.

Exemple — Par les longueurs

ABC a pour côtés 3, 4 et 5 ; DEF a pour côtés 4,5, 6 et 7,5.

On sait que

$$\frac{4,5}{3} = 1,5, \frac{6}{4} = 1,5 \text{ et } \frac{7,5}{5} = 1,5.$$

Or

Les trois quotients sont égaux.

Donc

Les deux triangles sont semblables, de rapport 1,5.

Méthode 6 — Dédire une longueur de la similitude

1. Repérer les sommets qui se correspondent, en s'aidant des angles égaux.
2. Écrire les quotients des côtés correspondants, dans le même ordre.
3. Résoudre par le produit en croix.

Exemple — Calculer une longueur

ABC et DEF sont semblables, les sommets se correspondant dans cet ordre. On donne $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm et $DE = 9$ cm.

On sait que

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}.$$

Or

$$\frac{9}{6} = \frac{EF}{8}.$$

Donc

$$EF = \frac{8 \times 9}{6} = 12 \text{ cm.}$$

Remarque

Le théorème de Thalès n'est qu'un cas particulier de la similitude : les triangles AMN et ABC y sont toujours semblables. Les deux outils répondent à la même question, celle des longueurs proportionnelles en géométrie.