

Notion de fonction : vocabulaire, notations et représentations

I - Dépendance entre deux grandeurs

Beaucoup de situations relient deux grandeurs : le prix payé dépend de la quantité achetée, l'aire d'un carré dépend de son côté, la température dépend de l'heure. À chaque valeur de la première correspond une valeur de la seconde, et une seule.

Définition 1

Une **fonction** est un procédé qui, à un nombre, associe **un seul** nombre.

Vocabulaire

Le nombre de départ est la **variable** ; le nombre associé est son **image**. Réciproquement, le nombre de départ est un **antécédent** de son image.

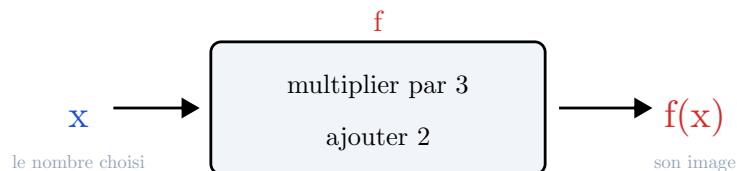


Fig. 1. – Une fonction se comporte comme une machine : un nombre entre, un seul en sort.

« Un seul » est la condition décisive : un nombre a toujours exactement une image, mais il peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

Exemple — Une dépendance qui n'est pas une fonction

Associer à une personne sa taille définit bien une fonction. Associer à une taille une personne n'en définit pas une : plusieurs personnes peuvent avoir la même taille.

II - Notations et vocabulaire

Notation

Une fonction se nomme par une lettre, souvent f , g ou h . On écrit

$$f : x \mapsto 3x + 2,$$

qui se lit « f est la fonction qui à x associe $3x + 2$ ».

Notation

L'image de x par f se note $f(x)$, qui se lit « f de x ». Ce n'est pas un produit.

Exemple

Pour $f : x \mapsto 3x + 2$:

- $f(4) = 3 \times 4 + 2 = 14$;
- l'image de 4 par f est 14 ;
- 4 est un antécédent de 14 par f .

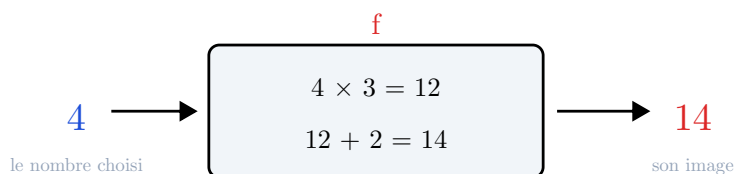


Fig. 2. – La même machine, appliquée au nombre 4.

Image et antécédent ne se rangent pas dans le même sens : dans $f(4) = 14$, le 4 est l'antécédent, le 14 est l'image.

III - Les modes de représentation

Une même fonction peut se donner de quatre façons différentes, qui disent toutes la même chose.

Définitions

- Un **programme de calcul** décrit les opérations à effectuer.
- Une **expression algébrique** traduit ce programme en formule.
- Un **tableau de valeurs** donne les images de quelques nombres.
- Une **représentation graphique** donne toutes les images d'un coup, à la précision de la lecture près.

Exemple — Une fonction, quatre représentations

Représentation	La fonction $f : x \mapsto 3x + 2$										
Programme de calcul	choisir un nombre, le multiplier par 3, ajouter 2										
Expression	$f(x) = 3x + 2$										
Tableau de valeurs	<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-1</td><td>2</td><td>8</td><td>14</td></tr></table>	x	-1	0	2	4	$f(x)$	-1	2	8	14
x	-1	0	2	4							
$f(x)$	-1	2	8	14							
Graphique	la courbe des points de coordonnées $(x; f(x))$										

Définition 2

La **représentation graphique** d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, où x parcourt les nombres pour lesquels f est définie.

côté (cm)	1	2	3	4	5
périmètre (cm)	4	8	12	16	20

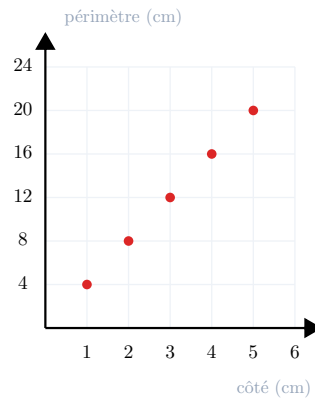


Fig. 3. – Du tableau de valeurs au graphique : chaque colonne devient un point.

Remarque

Passer d'une représentation à l'autre est l'exercice central du chapitre : du programme à l'expression en nommant le nombre choisi x ; de l'expression au tableau en calculant ; du tableau au graphique en plaçant les points.

IV - Déterminer l'image d'un nombre

Méthode 1 — Selon la représentation dont on dispose

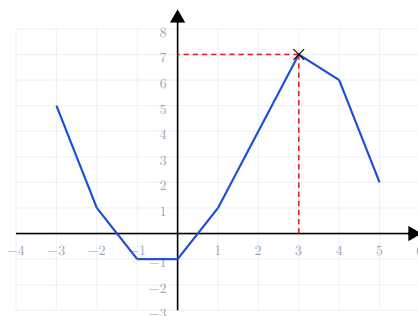
- **Par l'expression** : remplacer x par le nombre et calculer.
- **Par le tableau** : lire dans la colonne du nombre.
- **Par le graphique** : partir de l'abscisse, monter jusqu'à la courbe, lire l'ordonnée.
- **Par le programme** : exécuter les instructions.

Exemple — Par le calcul

Pour $g(x) = x^2 - 5$:

- $g(3) = 3^2 - 5 = 4$;
- $g(0) = -5$;
- $g(-2) = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1$.

Le signe moins se met entre parenthèses avant d'élever au carré : $(-2)^2 = 4$, alors que $-2^2 = -4$.



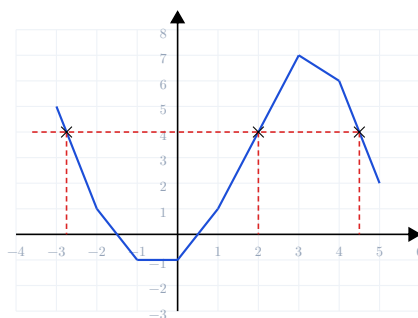
l'image de 3 est 7, notée $f(3) = 7$

Fig. 4. – Lecture d'une image : on part de l'axe des abscisses.

V - Déterminer un antécédent

Méthode 2 — Graphiquement

1. Repérer la valeur cherchée sur l'axe des ordonnées.
2. Tracer l'horizontale à cette hauteur.
3. Lire les abscisses de tous ses points d'intersection avec la courbe.



4 a 3 antécédents : on lit $-2,7$; 2 ; $4,5$

Fig. 5. – Lecture d'antécédents : on part de l'axe des ordonnées, et il peut y en avoir plusieurs.

Méthode 3 — Dans un tableau de valeurs

Chercher la valeur dans la ligne des images, puis lire le nombre écrit au-dessus. Un tableau ne donne que les antécédents qu'il contient : il ne prouve pas qu'il n'y en a pas d'autres.

Méthode 4 — Algébriquement

1. Écrire l'équation $f(x) = k$, où k est le nombre dont on cherche les antécédents.
2. La résoudre.
3. Chaque solution est un antécédent de k .

Exemple — Un antécédent par le calcul

Cherchons les antécédents de 17 par $f : x \mapsto 3x + 2$.

On sait que

Il s'agit de résoudre $3x + 2 = 17$.

Or

$3x = 15$, donc $x = 5$.

Donc

17 a un seul antécédent par f : le nombre 5.

Exemple — Zéro, un ou deux antécédents

Pour $g(x) = x^2$:

- 9 a deux antécédents, 3 et -3 ;
- 0 a un seul antécédent, 0 ;
- -4 n'a aucun antécédent.

VI - Modéliser un phénomène continu

Une fonction sert à décrire un phénomène qui varie sans à-coups : une hauteur d'eau, une distance parcourue, une température. On parle alors de **modèle** : la fonction ne remplace pas la réalité, elle en donne une description utilisable.

Exemple — Le prix d'un trajet en taxi

Une course coûte 4 € de prise en charge, plus 2 € par kilomètre.

Le prix p en fonction de la distance d , en kilomètres, s'écrit

$$p : d \mapsto 2d + 4.$$

Une course de 7 km coûte $p(7) = 18$ €. Réciproquement, une course à 24 € correspond à $2d + 4 = 24$, soit $d = 10$ km.

Exemple — L'aire d'un carré

L'aire d'un carré de côté c est $a : c \mapsto c^2$. Cette fonction n'a de sens que pour $c > 0$: le modèle a un domaine de validité.

Méthode 5 — Résoudre un problème avec une fonction

1. Repérer les deux grandeurs, et laquelle dépend de l'autre.
2. Choisir une lettre pour la variable, et écrire la fonction.
3. Traduire la question : cherche-t-on une image ou un antécédent ?
4. Répondre en revenant au contexte, avec l'unité.

Remarque

« Quelle est la valeur pour telle donnée ? » demande une image. « Pour quelle donnée obtient-on telle valeur ? » demande un antécédent, donc une équation.