

Probabilités et simulation

I - Vocabulaire des expériences aléatoires

Définition 1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, sans pouvoir prévoir lequel se produira.

Vocabulaire

Chaque résultat possible est une **issue**. L'ensemble des issues s'appelle l'**univers** de l'expérience.

Exemples

- Lancer un dé à six faces : six issues, 1 à 6.
- Lancer une pièce : deux issues, pile et face.
- Tirer une carte dans un jeu de 32 : trente-deux issues.

Définition 2

Un **évènement** est un ensemble d'issues, décrit par une phrase. Il est **réalisé** lorsque l'issue obtenue lui appartient.

Exemple

Avec un dé, l'évènement « obtenir un nombre pair » regroupe les issues 2, 4 et 6.

Définition 3

L'**évènement contraire** d'un évènement A , noté « non A », est l'évènement réalisé exactement quand A ne l'est pas.

Propriété 1

$$P(\text{non } A) = 1 - P(A).$$

Remarque

Le contraire de « obtenir au moins un six » est « n'obtenir aucun six », et non « obtenir au plus un six ». Écrire le contraire demande de la précision.

II - Calculer une probabilité par dénombrement

Définition 4

La **probabilité** d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'il se réalise.

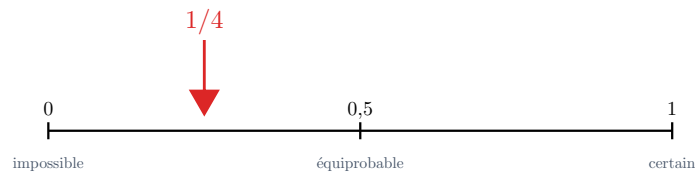


Fig. 1. – Une probabilité se place entre 0 (impossible) et 1 (certain).

Définition 5

Une situation est **équiprobable** lorsque toutes les issues ont la même probabilité.

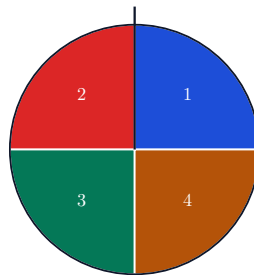


Fig. 2. – Des secteurs de même angle : toutes les issues ont la même probabilité.

Formule — Dans une situation équiprobable

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Exemples

- Avec un dé équilibré, $P(\text{obtenir } 5) = \frac{1}{6}$.
- $P(\text{obtenir un nombre pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- $P(\text{obtenir un nombre inférieur à } 7) = \frac{6}{6} = 1$: l'évènement est certain.
- $P(\text{obtenir } 7) = 0$: l'évènement est impossible.

Méthode 1 — Calculer une probabilité

1. Vérifier que la situation est équiprobable.
2. Compter toutes les issues possibles.
3. Compter celles qui réalisent l'évènement.
4. Écrire le quotient, puis le simplifier.

Exemple — Par l'évènement contraire

Dans une urne de 10 boules dont 3 sont rouges, la probabilité de ne pas tirer de rouge vaut

$$P(\text{non rouge}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

III - Expériences à deux épreuves

Lorsque l'expérience comporte deux épreuves — deux dés, deux tirages, une pièce puis un dé — chaque issue est un **couple** de résultats. Un tableau à double entrée les liste tous.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

6 issues favorables sur 36

chaque case est une issue ; les 36 issues sont équiprobables

Fig. 3. – Les 36 issues du lancer de deux dés, avec la somme obtenue dans chaque case.

Méthode 2 — Dénombrer avec un tableau à double entrée

1. Porter les issues de la première épreuve en colonnes, celles de la seconde en lignes.
2. Remplir chaque case avec le résultat correspondant.
3. Compter les cases favorables : le total des cases est le nombre d'issues.

Les 36 cases sont équiprobables, mais pas les sommes : la somme 7 s'obtient de six façons, la somme 2 d'une seule.

Exemple — La somme de deux dés

On sait que

Le tableau compte 36 issues équiprobables.

Or

Six d'entre elles donnent une somme égale à 7.

Donc

$$P(\text{somme} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

6 issues favorables sur 36

l'évènement « la somme dépasse 9 » regroupe plusieurs issues

Fig. 4. – L'évènement « la somme dépasse 9 » : les cases favorables se lisent en bloc.

Exemple — Deux tirages successifs

Une urne contient une boule rouge, une verte et une bleue ; on tire deux boules l'une après l'autre, en remettant la première.

Le tableau à double entrée compte $3 \times 3 = 9$ issues. L'évènement « les deux boules sont de la même couleur » en regroupe 3, donc sa probabilité vaut $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

IV - Simulation

Définition 6

Simuler une expérience aléatoire, c'est la reproduire par un programme ou un tableur, afin de l'observer un grand nombre de fois.

Protocole — Sur un tableur

1. En A1, écrire =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) pour simuler un lancer de dé.
2. Recopier la formule sur 1 000 lignes.
3. En C1, écrire =NB.SI(A1:A1000;6) pour compter les six obtenus.
4. Diviser par 1 000 : on obtient la fréquence du six.
5. La touche F9 recalcule tout et donne une nouvelle simulation.

Protocole — Avec un logiciel de programmation

mettre succès à 0
répéter 1000 fois :
...mettre dé à nombre aléatoire entre 1 et 6
...si dé = 6 alors ajouter 1 à succès
dire succès / 1000

Remarque

Deux exécutions d'une même simulation ne donnent pas le même résultat : c'est normal, et c'est même le propre du hasard. Ce qui se reproduit, c'est l'ordre de grandeur.

V - Stabilisation des fréquences

Propriété 2 — Loi des grands nombres

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'un évènement se rapproche de sa probabilité.

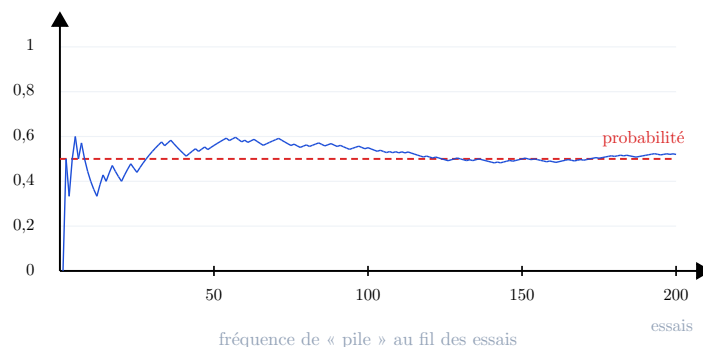


Fig. 5. — La fréquence de « pile » oscille beaucoup au début, puis se stabilise autour de 0,5.

Méthode 3 — Interpréter une simulation

- Sur un petit nombre de lancers, la fréquence peut s'écarter beaucoup de la probabilité : ce n'est pas une anomalie.
- Plus le nombre de lancers augmente, plus l'écart se réduit.
- Une fréquence n'est jamais une preuve : elle donne une estimation.

La loi des grands nombres ne dit rien du prochain lancer. Après cinq piles d'affilée, la probabilité d'obtenir pile reste 0,5 : la pièce n'a pas de mémoire.

Exemple — Estimer une probabilité inconnue

Une punaise lancée 2 000 fois retombe pointe en l'air 1 240 fois. La fréquence vaut 0,62 : on peut estimer que la probabilité de cet évènement est proche de 0,62.

Ici la simulation est le seul outil disponible : aucune symétrie ne permet de calculer cette probabilité par dénombrement.