

Rotations : frises, pavages et rosaces

I - Symétries et translation : les propriétés de conservation

Définitions

- La **symétrie axiale** d'axe (d) associe à un point M le point M' tel que (d) soit la médiatrice de $[MM']$.
- La **symétrie centrale** de centre O associe à M le point M' tel que O soit le milieu de $[MM']$.
- La **translation** fait glisser toute la figure d'une même distance, dans une même direction et un même sens.

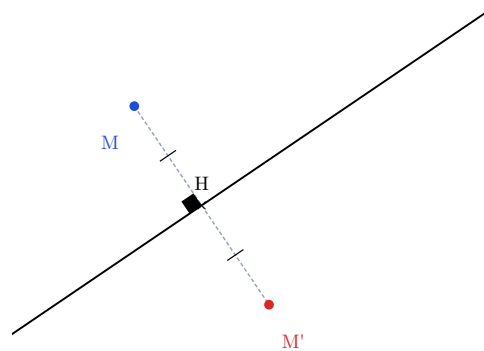
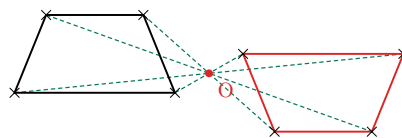


Fig. 1. – La symétrie axiale : le pliage le long de l'axe amène M sur M' .



la figure rouge est l'image de la noire par le demi-tour de centre O

Fig. 2. – La symétrie centrale : un demi-tour autour du centre.

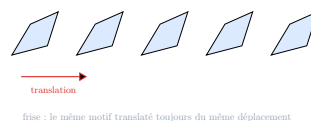


Fig. 3. – La translation : le même déplacement répété, sans rotation ni retournement.

Propriétés — Ce que ces transformations conservent
Symétries et translation conservent :

- les **longueurs** ;
- les **mesures d'angles** ;
- les **aires** ;
- l'**alignement**, le **parallélisme** et les **milieux**.

Remarque

La figure image a donc exactement la même forme et la même taille que la figure de départ : ces transformations ne déforment rien. La symétrie axiale est la seule des trois à inverser le sens de parcours de la figure.

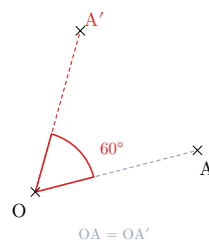
II - La rotation

Définition 1

La **rotation** de centre O , d'angle α et de sens donné associe à tout point M différent de O le point M' tel que

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad \widehat{MOM'} = \alpha,$$

l'angle étant compté dans le sens choisi. Le point O est sa propre image.

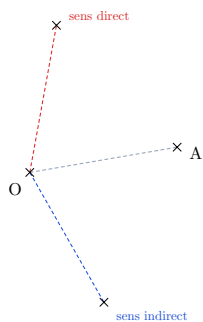


rotation de centre O, d'angle 60° , dans le sens direct

Fig. 4. – L'image d'un point : il reste à la même distance du centre, après un quart, un tiers ou une autre fraction de tour.

Vocabulaire

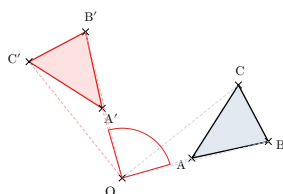
Le **sens direct** est celui inverse des aiguilles d'une montre ; le **sens indirect** est celui des aiguilles.



le sens direct tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

Fig. 5. – Le même angle, les deux sens : les images sont différentes.

Une rotation n'est complètement définie que par ses trois données : centre, angle et sens. En omettre une rend la construction impossible.



la figure entière tourne de 90° autour de O

Fig. 6. – L'image d'une figure s'obtient en construisant l'image de chacun de ses points caractéristiques.

Remarque

La symétrie centrale de centre O n'est rien d'autre que la rotation de centre O et d'angle 180° : le sens n'a alors pas d'importance.

III - Effet d'une rotation sur les grandeurs

Propriétés

Une rotation conserve :

- les longueurs, donc les périmètres ;
- les mesures d'angles ;
- les aires ;
- l'alignement, le parallélisme et les milieux.

L'image d'un segment est un segment de même longueur, l'image d'un cercle un cercle de même rayon, l'image d'un triangle un triangle superposable.

Méthode 1 — Déterminer une longueur ou un angle

Reconnaitre que la figure cherchée est l'image d'une figure connue par une rotation, puis invoquer la conservation : la grandeur cherchée est égale à celle de la figure de départ.

Exemple

$A'B'C'$ est l'image de ABC par une rotation de centre O et d'angle 50° . On donne $AB = 6$ cm, $\widehat{BAC} = 40^\circ$ et une aire de $14,5 \text{ cm}^2$.

On sait que

Une rotation conserve longueurs, angles et aires.

Donc

$A'B' = 6$ cm, $\widehat{B'A'C'} = 40^\circ$, et l'aire de $A'B'C'$ vaut $14,5 \text{ cm}^2$.

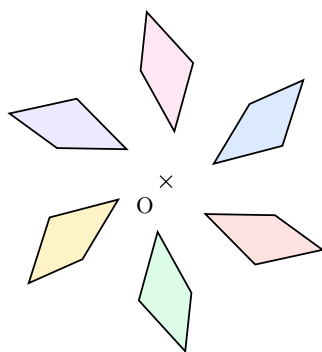
Remarque

Le seul changement est la **position** de la figure. C'est ce qui distingue les rotations des agrandissements et des réductions, étudiés au chapitre suivant.

IV - Reconnaître des rotations dans les frises, pavages et rosaces

Définitions

- Une **frise** est un motif répété le long d'une bande.
- Un **pavage** recouvre tout le plan, sans trou ni recouvrement.
- Une **rosace** s'obtient en tournant un motif autour d'un point.



rosace : six exemplaires du motif, tournés de 60° autour de O

Fig. 7. – Une rosace : six exemplaires du même motif, tournés de 60° à chaque fois.

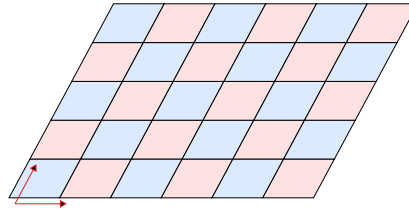
Méthode 2 — Trouver l'angle d'une rosace

Si le motif se répète n fois autour du centre, l'angle de la rotation vaut

$$\alpha = 360 \frac{^\circ}{n}.$$

Exemples

- Un motif répété 6 fois : rotation de 60° .
- Un motif répété 8 fois : rotation de 45° .
- Un motif répété 5 fois : rotation de 72° .



pavage : le même motif traduit selon deux directions, sans trou ni recouvrement

Fig. 8. – Un pavage engendré par deux translations : chaque tuile est l'image d'une autre.

Méthode 3 — Identifier la transformation

1. Repérer le motif élémentaire, le plus petit qui se répète.
2. Comparer deux exemplaires voisins : ont-ils la même orientation ?
3. Même orientation, glissement simple : c'est une translation.
4. Orientation tournée autour d'un point fixe : c'est une rotation.
5. Figure retournée : c'est une symétrie.

V - Constructions

Protocole — Construire à la main l'image d'un point

1. Tracer la demi-droite $[OM)$.
2. Reporter au compas la longueur OM sur un arc de centre O .
3. Au rapporteur, construire l'angle α à partir de $[OM)$, dans le sens demandé.
4. M' est l'intersection de l'arc et du second côté de l'angle.

Protocole — Construire l'image d'une figure

1. Construire l'image de chaque sommet.
2. Relier les images dans le même ordre que la figure de départ.
3. Contrôler : les longueurs doivent être conservées.

Protocole — Avec un logiciel de géométrie dynamique

1. Placer le centre de rotation.
2. Sélectionner l'outil « rotation », puis la figure et le centre.
3. Saisir l'angle, en précisant le sens.
4. Déplacer un point de la figure de départ : l'image suit, ce qui permet de conjecturer les propriétés de conservation.

Remarque

Sur un quadrillage, la construction se simplifie beaucoup pour les angles de 90° et de 180° : les déplacements se comptent en carreaux, en échangeant les rôles des deux directions.