

Proportionnalité, fonctions linéaires et pourcentages d'évolution

I - Situations de proportionnalité

Définition 1

Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsqu'on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre, appelé **coefficient de proportionnalité**.

Masse (kg)	1	4	7
Prix (€)	3	12	21

Fig. 1. – Un tableau de proportionnalité : le même coefficient relie chaque colonne.

Méthode 1 — Reconnaître une situation de proportionnalité

1. Calculer le quotient de la seconde grandeur par la première, pour chaque couple de valeurs.
2. Tous les quotients égaux : il y a proportionnalité, et ce quotient est le coefficient.
3. Un seul quotient différent suffit à conclure qu'il n'y en a pas.

Exemple

Masse (kg)	2	5	8	12
Prix (€)	4,6	11,5	18,4	27,6

$\frac{4,6}{2} = 2,3$, $\frac{11,5}{5} = 2,3$, $\frac{18,4}{8} = 2,3$: le prix est proportionnel à la masse, au tarif de 2,3 € par kilogramme.

Définition 2

La **quatrième proportionnelle** est la valeur manquante d'un tableau de proportionnalité dont on connaît trois valeurs.

Méthode 2 — Trois façons de la calculer

- Par le **coefficient** : le calculer, puis multiplier.
- Par le **produit en croix** : de $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, on tire $x = \frac{b \times c}{a}$.
- Par la **linéarité** : additionner ou multiplier des colonnes connues.

Exemple

Si 8 kg coutent 18,4 €, combien coutent 14 kg ?

$$x = \frac{14 \times 18,4}{8} = 32,2 \text{ €}.$$

II - La fonction linéaire**Définition 3**

Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax,$$

où a est un nombre fixé, appelé le **coefficient** de la fonction.

Propriété 1

Une situation est de proportionnalité si, et seulement si, elle se modélise par une fonction linéaire. Le coefficient de la fonction est alors le coefficient de proportionnalité.

Exemple

Le prix de la masse achetée s'écrit $p : m \mapsto 2,3 m$. Une masse de 14 kg coute $p(14) = 2,3 \times 14 = 32,2$ €.

Propriété 2

Une fonction linéaire vérifie toujours $f(0) = 0$, et

$$f(k \times x) = k \times f(x)$$

pour tout nombre k : doubler l'antécédent double l'image.

Méthode 3 — Déterminer une fonction linéaire

Il suffit de connaître l'image d'un seul nombre non nul : si $f(x_0) = y_0$, alors $a = \frac{y_0}{x_0}$.

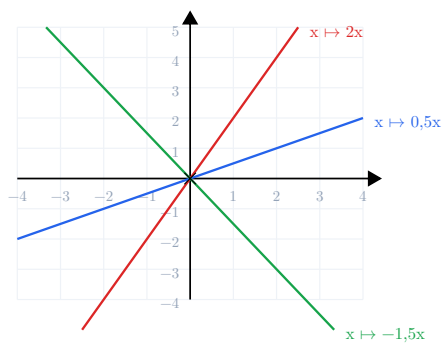
Exemple

Une fonction linéaire vérifie $f(4) = 10$. Alors $a = \frac{10}{4} = 2,5$, donc $f : x \mapsto 2,5 x$.

III - Représentation graphique**Propriété 3**

La représentation graphique d'une fonction linéaire $x \mapsto ax$ est une **droite passant par l'origine** du repère.

Réciproquement, toute droite passant par l'origine, autre que l'axe des ordonnées, représente une fonction linéaire.

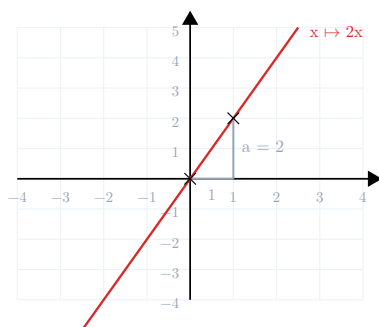


toutes ces droites passent par l'origine du repère

Fig. 2. – Trois fonctions linéaires : la droite est d'autant plus « penchée » que $|a|$ est grand, et elle descend quand a est négatif.

Méthode 4 — Tracer la droite

1. L'origine appartient toujours à la droite : c'est un premier point.
2. Calculer l'image d'un nombre bien choisi, par exemple 1 ou 2.
3. Placer ce second point, et tracer la droite.



en avançant de 1, on monte de a : le coefficient se lit sur la droite

Fig. 3. – Lire le coefficient : en avançant de 1, on monte de a .

Méthode 5 — Lire le coefficient sur un graphique

Partir de l'origine, avancer de 1 vers la droite, puis mesurer la montée : cette montée est le coefficient. Une descente donne un coefficient négatif.

Reconnaitre une proportionnalité sur un graphique se résume à deux conditions : les points sont alignés, et cette droite passe par l'origine. Une droite qui ne passe pas par l'origine n'est pas une situation de proportionnalité.

IV - Pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur

Définition 4

Augmenter une valeur de $t\%$, c'est la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; la diminuer de $t\%$, c'est la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$. Ce nombre est le **coefficient multiplicateur** de l'évolution.

Exemples

- +5% correspond à $\times 1,05$.
- +20% correspond à $\times 1,2$.
- -20% correspond à $\times 0,8$.
- -100% correspond à $\times 0$.

Méthode 6 — Retrouver le taux à partir du coefficient

Un coefficient c correspond à une évolution de

$$t = (c - 1) \times 100 \text{ \%},$$

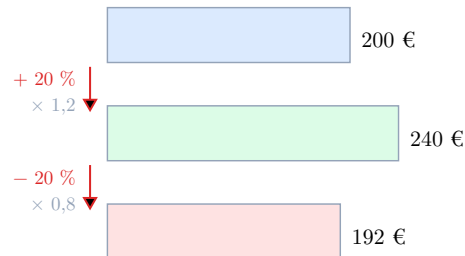
positive si $c > 1$, négative si $c < 1$.

Exemple

Une multiplication par 1,35 correspond à une hausse de 35% ; une multiplication par 0,93 à une baisse de 7%.

Propriété 4 — Évolutions successives

Enchaîner deux évolutions revient à multiplier leurs coefficients. Le taux global n'est pas la somme des taux.



une hausse de 20 % puis une baisse de 20 % ne ramènent pas à 200 €

Fig. 4. — Une hausse puis une baisse du même pourcentage : la valeur finale est inférieure à la valeur initiale.

Exemple — Hausse puis baisse**On sait que**

Un article à 200 € augmente de 20%, puis baisse de 20%.

Or

$$200 \times 1,2 \times 0,8 = 200 \times 0,96 = 192.$$

Donc

Le prix final est 192 €, soit une baisse globale de 4% — et non un retour au prix de départ.

Une hausse de 20% suivie d'une baisse de 20% ne se compense pas : la baisse porte sur une valeur plus grande que la hausse.

Exemple — Appliquer une évolution

Un loyer de 650 € augmente de 2,5 % :

$$650 \times 1,025 = 666,25 \text{ €}.$$

V - Proportionnalité en géométrie

La proportionnalité ne concerne pas que les prix : elle est au cœur de toute la géométrie des configurations.

Propriété 5

Dans une configuration de Thalès, les longueurs des deux triangles sont proportionnelles : le coefficient est le rapport $\frac{AM}{AB}$.

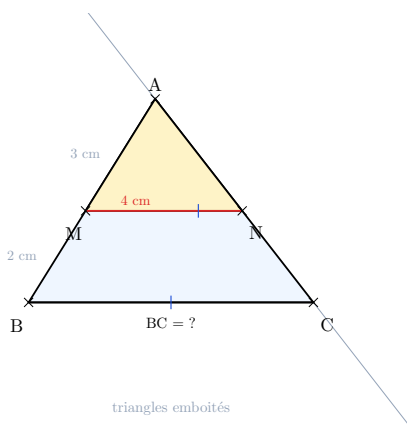


Fig. 5. – Les longueurs du petit triangle et celles du grand forment un tableau de proportionnalité.

Exemple

Avec $AM = 3$, $AB = 5$ et $MN = 4$:

	petit triangle	grand triangle
sur la première droite	3	5
segment parallèle	4	BC

Le coefficient vaut $\frac{5}{3}$, donc $BC = 4 \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$.

Propriété 6

Deux triangles semblables ont leurs longueurs proportionnelles : le rapport de similitude est un coefficient de proportionnalité.

Méthode 7 — Reconnaître une proportionnalité géométrique

Chercher, dans la figure, deux triangles de même forme : configuration de Thalès, triangles semblables, agrandissement ou réduction. Les longueurs correspondantes forment alors un tableau de proportionnalité.