

Homothéties, agrandissement-réduction et effet sur les grandeurs

I - Agrandissement et réduction

Définition 1

Une figure est un **agrandissement** ou une **réduction** d'une autre lorsque toutes ses longueurs sont obtenues en multipliant celles de la première par un même nombre $k > 0$, appelé le **rapport**.

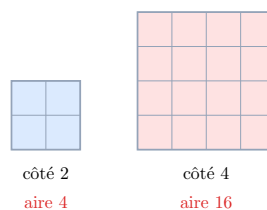
Remarque

Agrandissement quand $k > 1$, réduction quand $0 < k < 1$, figure superposable quand $k = 1$. Les angles, eux, ne changent jamais.

Propriétés — Effet sur les grandeurs

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

- les **longueurs** sont multipliées par k ;
- les **aires** sont multipliées par k^2 ;
- les **volumes** sont multipliés par k^3 .



$$\text{longueurs} \times 2, \text{aires} \times 2^2 = 4, \text{volumes} \times 2^3 = 8$$

l'aire est multipliée par le carré du rapport

Fig. 1. – En doublant le côté, l'aire est multipliée par 4 : quatre carrés de côté 2 tiennent dans un carré de côté 4.

Pour mieux comprendre

L'aire est un produit de deux longueurs, chacune multipliée par k : d'où $k \times k = k^2$. Le volume est un produit de trois longueurs : d'où k^3 .

Exemple — Une maquette

Une maquette est à l'échelle $\frac{1}{50}$ d'un bâtiment.

- Une hauteur de 12 cm sur la maquette correspond à $12 \times 50 = 600$ cm, soit 6 m.
- Une façade de 200 cm^2 sur la maquette correspond à $200 \times 50^2 = 500\,000 \text{ cm}^2$, soit 50 m^2 .
- Un volume de 1 L sur la maquette correspond à $50^3 = 125\,000$ L, soit 125 m^3 .

L'erreur la plus fréquente consiste à multiplier une aire par k au lieu de k^2 . Doubler les dimensions d'une pièce ne double pas sa surface : il la quadruple.

II - L'homothétie

Définition 2

Soit O un point et k un nombre non nul. L'**homothétie** de centre O et de rapport k associe à tout point M le point M' de la droite (OM) tel que

$$OM' = |k| \times OM,$$

M' étant du même côté que M si $k > 0$, et de l'autre côté si $k < 0$.

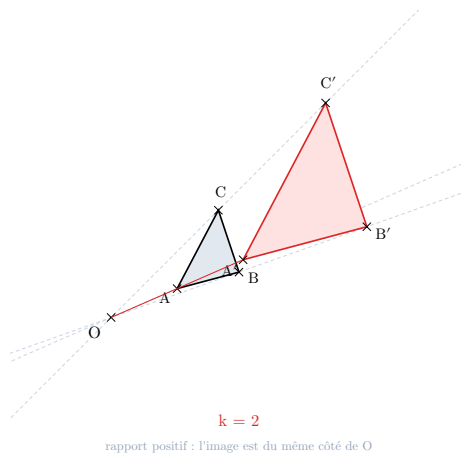


Fig. 2. – Une homothétie de rapport 2 : chaque point s'éloigne de O , deux fois plus loin, sur la même demi-droite.

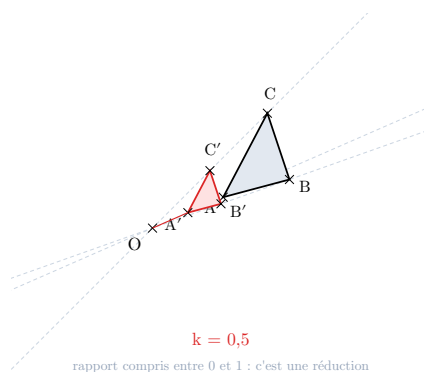


Fig. 3. – Un rapport compris entre 0 et 1 rapproche les points de O : c'est une réduction.

Méthode 1 — Construire l'image d'une figure

1. Tracer les droites reliant O à chaque sommet.
2. Reporter sur chacune la longueur multipliée par $|k|$, du bon côté de O .
3. Relier les images dans le même ordre.

III - Rapport positif, rapport négatif

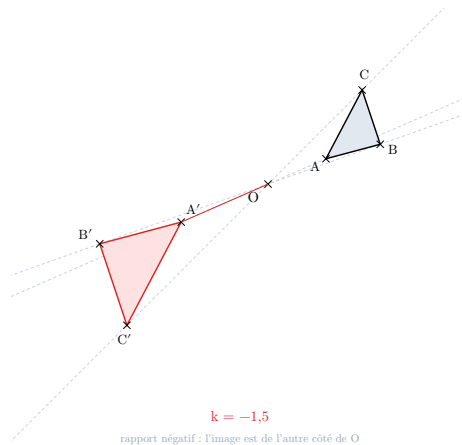


Fig. 4. – Un rapport négatif : l'image passe de l'autre côté du centre, et la figure se retrouve retournée.

Propriété 1

L'homothétie de centre O et de rapport -1 est exactement la symétrie centrale de centre O .

Remarque

Le signe du rapport ne change ni les longueurs ni les aires : $|k|$ seul intervient dans les calculs de grandeurs. Il ne change que la position de l'image.

IV - Propriétés de conservation et lien avec Thalès

Propriétés

Une homothétie de rapport k :

- multiplie les longueurs par $|k|$;
- **conserve** les mesures d'angles ;
- conserve l'alignement, le parallélisme et les milieux ;
- transforme une droite en une droite qui lui est **parallèle**.

C'est la différence essentielle avec les symétries, la translation et la rotation : celles-ci conservent les longueurs, l'homothétie les multiplie. Une homothétie déforme la taille, jamais la forme.

Propriété 2 — Lien avec le théorème de Thalès

Si M' et N' sont les images de M et N par l'homothétie de centre O et de rapport k , alors $(M'N')$ est parallèle à (MN) et

$$M'N' = |k| \times MN.$$

On retrouve exactement la configuration du théorème de Thalès, de sommet O .

Remarque

Le théorème de Thalès et l'homothétie disent donc la même chose, sous deux points de vue : l'un parle de quotients de longueurs, l'autre d'une transformation du plan.

V - Calculs dans une homothétie de rapport k

Méthode 2 — Calculer une grandeur de l'image

1. Identifier le rapport k de l'homothétie ou de l'agrandissement.
2. Multiplier par $|k|$ pour une longueur, par k^2 pour une aire, par k^3 pour un volume.

Exemple — Longueur, aire et volume

Un solide de hauteur 5 cm, d'aire latérale 60 cm² et de volume 80 cm³ subit une homothétie de rapport 3.

On sait que

Les longueurs sont multipliées par 3, les aires par 3² et les volumes par 3³.

Donc

La hauteur devient 15 cm, l'aire $60 \times 9 = 540$ cm², et le volume $80 \times 27 = 2160$ cm³.

Exemple — Retrouver le rapport

Deux figures semblables ont des aires de 18 cm² et 50 cm².

On sait que

$$k^2 = \frac{50}{18} = \frac{25}{9}.$$

Or

$$k > 0, \text{ donc } k = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

Donc

Les longueurs de la seconde valent $\frac{5}{3}$ de celles de la première.

Exemple — Une réduction

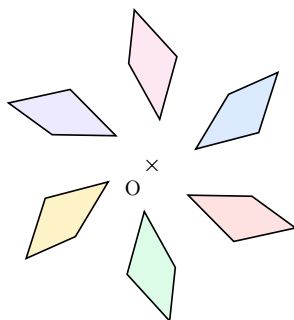
Un cône de volume 240 cm³ est réduit dans le rapport $\frac{1}{2}$. Son volume devient

$$240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{240}{8} = 30 \text{ cm}^3.$$

VI - Identifier des homothéties dans une frise, un pavage, une rosace

Méthode 3 — Reconnaître une homothétie

1. Comparer deux exemplaires du motif : sont-ils de la même taille ?
2. Tailles différentes mais même forme : il y a un agrandissement ou une réduction.
3. Relier les points correspondants : si toutes ces droites se coupent en un même point, ce point est le centre de l'homothétie.
4. Le rapport se lit sur le quotient de deux longueurs correspondantes.



rosace : six exemplaires du motif, tournés de 60° autour de O

Fig. 5. – Dans une rosace, les motifs ont tous la même taille : la transformation en jeu est une rotation, pas une homothétie.

Exemple — Une spirale de motifs

Certaines rosaces combinent une rotation et une homothétie de même centre : le motif tourne et rétrécit à chaque étape. Le rapport se lit alors sur deux motifs consécutifs, l'angle sur leur inclinaison.

Remarque

Frises, pavages et rosaces se décrivent tous à l'aide de quatre transformations : translation, symétrie axiale, symétrie centrale et rotation — auxquelles l'homothétie ajoute le changement d'échelle.