

Fonctions affines

I - Définition

Définition 1

Une **fonction affine** est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax + b,$$

où a et b sont deux nombres fixés.

Vocabulaire

a est le **coefficient directeur** de la fonction, b son **ordonnée à l'origine**.

Exemples

- $f : x \mapsto 3x - 2$ est affine, avec $a = 3$ et $b = -2$.
- $g : x \mapsto -x + 5$ est affine, avec $a = -1$ et $b = 5$.
- $h : x \mapsto 4x$ est affine, avec $b = 0$: c'est aussi une fonction linéaire.
- $k : x \mapsto 7$ est affine, avec $a = 0$: c'est une fonction constante.
- $m : x \mapsto x^2 + 1$ n'est pas affine.

Remarque

Les fonctions linéaires sont donc les fonctions affines dont l'ordonnée à l'origine est nulle. Toute fonction linéaire est affine ; la réciproque est fausse.

Propriété 1

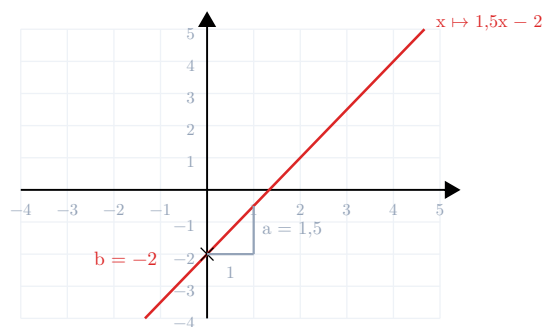
Pour toute fonction affine, $f(0) = b$: l'ordonnée à l'origine est l'image de 0.

II - Représentation graphique

Propriété 2

La représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est une **droite**. Elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; b)$.

Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation d'une fonction affine.



b se lit sur l'axe des ordonnées, a se lit sur la pente

Fig. 1. – La droite de $x \mapsto 1,5x - 2$: elle coupe l'axe des ordonnées en -2 , et monte de $1,5$ quand on avance de 1 .

Méthode 1 — Tracer la droite à partir de deux points

1. Choisir deux valeurs de x éloignées, par exemple 0 et 4 .
2. Calculer leurs images.
3. Placer les deux points obtenus.
4. Tracer la droite qui les joint, puis contrôler avec un troisième point.

Exemple

Pour $f : x \mapsto 1,5x - 2$: $f(0) = -2$ et $f(4) = 4$. On place $(0; -2)$ et $(4; 4)$, et on trace.

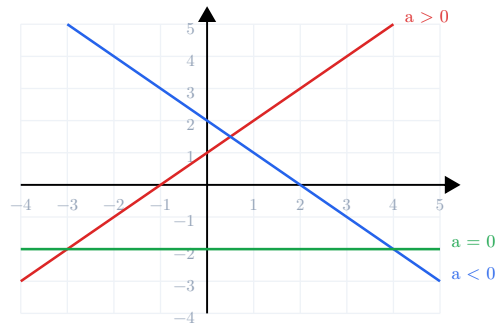
Remarque

Deux points suffisent, mais un troisième sert de vérification : s'il n'est pas aligné, c'est qu'un calcul est faux.

III - Interpréter les paramètres

Propriétés

- Le signe de a donne le sens de variation : la droite **monte** si $a > 0$, **descend** si $a < 0$, est **horizontale** si $a = 0$.
- La valeur absolue de a donne l'inclinaison : plus $|a|$ est grand, plus la droite est raide.
- b donne la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe des ordonnées.



le signe de a donne le sens de variation, b la hauteur au départ

Fig. 2. – Trois allures : coefficient directeur positif, négatif et nul.

Méthode 2 — Lire a et b sur un graphique

1. Lire b : c'est l'ordonnée du point d'intersection avec l'axe des ordonnées.
2. Partir d'un point de la droite à coordonnées entières, avancer de 1 vers la droite, et mesurer la montée : c'est a .
3. Une descente donne un a négatif.

Formule — Coefficient directeur à partir de deux points

Si la droite passe par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, avec $x_A \neq x_B$, alors

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemple

Une droite passe par $(1; 3)$ et $(5; 11)$:

$$a = \frac{11 - 3}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2.$$

Comme $f(1) = 3$, on a $2 \times 1 + b = 3$, donc $b = 1$: la fonction est $x \mapsto 2x + 1$.

IV - Image et antécédent

Méthode 3 — Déterminer une image

Remplacer x par le nombre dans l'expression $ax + b$, et calculer.

Exemple

Pour $f : x \mapsto 3x - 2$: $f(5) = 3 \times 5 - 2 = 13$ et $f(-2) = -6 - 2 = -8$.

Méthode 4 — Déterminer un antécédent

1. Écrire l'équation $ax + b = k$.
2. La résoudre : $x = \frac{k-b}{a}$, avec $a \neq 0$.

Exemple

Cherchons l'antécédent de 13 par $f : x \mapsto 3x - 2$.

On sait que

Il s'agit de résoudre $3x - 2 = 13$.

Or

$3x = 15$, donc $x = 5$.

Donc

L'antécédent de 13 par f est 5.

Propriété 3

Une fonction affine avec $a \neq 0$ associe à chaque nombre un unique antécédent : la droite coupe toute horizontale en exactement un point.

Remarque

Si $a = 0$, la fonction est constante : b a une infinité d'antécédents, et tout autre nombre n'en a aucun.

V - Résoudre des problèmes**Méthode 5 — Modéliser par une fonction affine**

Une situation se modélise par une fonction affine dès qu'elle comporte une **part fixe** et une **part proportionnelle** : b est la part fixe, a le tarif unitaire.

Exemple — Deux tarifs

Un club propose deux formules :

- formule A : 120 € d'abonnement, puis 2 € la séance ;
- formule B : 5 € la séance, sans abonnement.

On sait que

Ces tarifs se modélisent par $a : n \mapsto 2n + 120$, affine, et $b : n \mapsto 5n$, linéaire.

Or

Les deux formules coutent le même prix lorsque $2n + 120 = 5n$, soit $n = 40$.

Donc

Jusqu'à 40 séances, la formule B est la moins chère ; au-delà, c'est la formule A.

Méthode 6 — Résolution graphique

1. Tracer les deux droites dans un même repère.

2. Le point d'intersection donne la valeur pour laquelle les deux modèles coïncident.
3. Comparer les positions relatives des droites de part et d'autre de ce point.

Une lecture graphique donne une valeur approchée ; le calcul algébrique donne la valeur exacte. Les deux se complètent : le graphique montre, l'équation prouve.

Exemple — Un remplissage

Un réservoir contient déjà 30 L, et on le remplit à raison de 8 L par minute.

Le volume s'écrit $v : t \mapsto 8t + 30$, en litres, où t est la durée en minutes.

- Au bout de 7 minutes : $v(7) = 86$ L.
- Pour atteindre 150 L : $8t + 30 = 150$, donc $t = 15$ minutes.

Exemple — Une conversion

La conversion des degrés Celsius en degrés Fahrenheit est affine :

$$f : c \mapsto 1,8 c + 32.$$

Ainsi 0°C valent 32°F , et 100°C valent 212°F . Réciproquement, $1,8 c + 32 = 68$ donne $c = 20^\circ\text{C}$.