

Puissances, notation scientifique et ordres de grandeur

I - Puissances d'un nombre

Définition 1

Soit a un nombre et n un entier supérieur ou égal à 1. La **puissance** a^n est le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Vocabulaire

a est la **base**, n l'**exposant**. On lit « a exposant n ». Pour $n = 2$ on dit « a au carré », pour $n = 3$ « a au cube ».

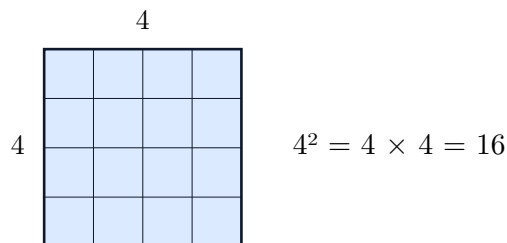


Fig. 1. – Le carré d'un nombre, vu comme l'aire d'un carré.

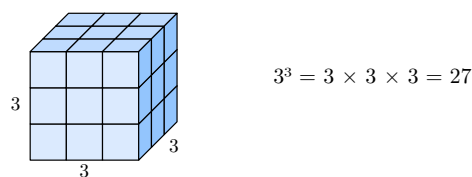


Fig. 2. – Le cube d'un nombre, vu comme le volume d'un cube.

Définitions

Pour $a \neq 0$:

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Remarque

L'exposant négatif ne rend pas le résultat négatif : $2^{-3} = \frac{1}{8}$ est positif. Un exposant négatif signale un inverse, pas un signe.

Exemples

- $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- $(-2)^3 = -8$ et $(-2)^4 = 16$
- $5^{-2} = \frac{1}{25} = 0,04$
- $7^0 = 1$ et $7^1 = 7$

Les parenthèses sont décisives : $(-3)^2 = 9$ alors que $-3^2 = -9$, car l'exposant ne porte alors que sur le 3.

Propriété 1

Le signe de a^n pour $a < 0$ dépend de la parité de n : positif si n est pair, négatif si n est impair.

II - Simplifier un produit, un quotient

Formules — Règles de calcul sur les puissances

Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$, et pour tous entiers m et n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Ces règles ne valent que pour une même base. L'expression $2^3 \times 5^3$ se simplifie en $(2 \times 5)^3 = 10^3$, mais $2^3 \times 5^4$ ne se simplifie pas.

Exemples

- $3^5 \times 3^2 = 3^7$
- $\frac{10^8}{10^3} = 10^5$
- $(2^3)^4 = 2^{12}$
- $7^{-2} \times 7^5 = 7^3$
- $\frac{10^4}{10^{-2}} = 10^6$

Méthode 1 — Simplifier une expression

1. Regrouper les puissances de même base.
2. Appliquer les règles pour n'avoir qu'un exposant par base.
3. Écrire le résultat sans exposant négatif si l'énoncé le demande.

Exemple

$$\frac{3^4 \times 3^{-6}}{3^{-3}} = 3^{4-6+3} = 3^1 = 3.$$

III - Puissances de 10 et préfixes

Propriété 2

Pour tout entier n positif :

$$10^n = 1 \underbrace{0\dots0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{et} \quad 10^{-n} = 0, \underbrace{0\dots0}_{n-1 \text{ zéros}} 1.$$

Exemples

- $10^6 = 1\,000\,000$
- $10^{-3} = 0,001$
- $10^0 = 1$

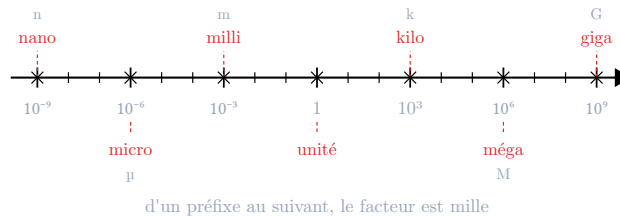


Fig. 3. – Les préfixes usuels, de nano à giga : chaque étape multiplie par mille.

Formule — Les préfixes du système international

nano	micro	milli	—	kilo	méga	giga	téra
10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^0	10^3	10^6	10^9	10^{12}

Exemples

- $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$; $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$.
- $1 \text{ Go} = 10^9 \text{ octets}$; $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$.
- $1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$.

IV - Notation scientifique

Définition 2

L'écriture scientifique d'un nombre décimal non nul est son écriture sous la forme

$$a \times 10^n,$$

où n est un entier relatif et où a est un décimal tel que $1 \leq |a| < 10$: il n'y a donc qu'un seul chiffre, non nul, avant la virgule.

Méthode 2 — Écrire un nombre en notation scientifique

1. Placer la virgule juste après le premier chiffre non nul.
2. Compter de combien de rangs la virgule a été déplacée.
3. Vers la gauche : exposant positif ; vers la droite : exposant négatif.

Exemples

- $47\,500 = 4,75 \times 10^4$
- $0,000\,62 = 6,2 \times 10^{-4}$
- $8,3 = 8,3 \times 10^0$
- $0,000\,000\,000\,1 = 10^{-10}$

$47,5 \times 10^3$ vaut bien $47\,500$, mais ce n'est pas l'écriture scientifique : $47,5$ est supérieur à 10.

Méthode 3 — Comparer deux nombres en notation scientifique

1. Comparer d'abord les exposants : le plus grand exposant l'emporte, pour des nombres positifs.
2. À exposants égaux, comparer les nombres a .

Exemple

$3,1 \times 10^5 < 2,4 \times 10^7$, car $5 < 7$, même si $3,1 > 2,4$.

Définition 3

L'**ordre de grandeur** d'un nombre est la puissance de 10 la plus proche de ce nombre : on arrondit a à l'unité dans son écriture scientifique.

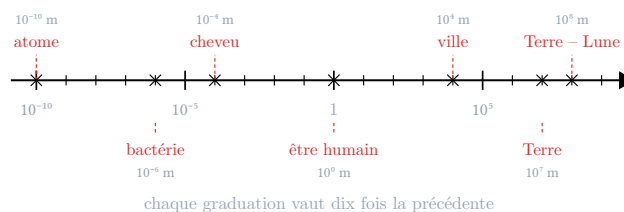


Fig. 4. — Quelques ordres de grandeur, de l'atome à la distance Terre-Lune.

Exemples

- $3\,200 = 3,2 \times 10^3$: ordre de grandeur 3×10^3 .
- $87\,000 = 8,7 \times 10^4$: ordre de grandeur 10^5 .
- La population mondiale, environ 8×10^9 personnes.

Méthode 4 — Estimer un résultat

Remplacer chaque nombre par son ordre de grandeur, puis calculer : le résultat obtenu sert à contrôler l'ordre de grandeur du calcul exact.

V - Problèmes**Exemple — En physique : la vitesse de la lumière**

La lumière parcourt 3×10^8 m en une seconde. Quelle distance parcourt-elle en une année, sachant qu'une année compte environ $3,15 \times 10^7$ secondes ?

On sait que

La distance est le produit de la vitesse par la durée.

Or

$$3 \times 10^8 \times 3,15 \times 10^7 = 9,45 \times 10^{8+7} = 9,45 \times 10^{15}.$$

Donc

Une année-lumière vaut environ $9,45 \times 10^{15}$ m, soit près de dix mille milliards de kilomètres.

Exemple — En chimie : le nombre d'Avogadro

Une mole contient 6×10^{23} entités. Combien d'atomes dans 0,05 mole ?

$$0,05 \times 6 \times 10^{23} = 0,3 \times 10^{23} = 3 \times 10^{22}.$$

Exemple — En informatique : les unités de stockage

Un disque de 2 To contient 2×10^{12} octets. Combien de fichiers de 4 Mo peut-il stocker ?

$$\frac{2 \times 10^{12}}{4 \times 10^6} = 0,5 \times 10^6 = 5 \times 10^5,$$

soit 500 000 fichiers.

Exemple — En sciences de la vie : une échelle

Une bactérie mesure environ 2 μm , soit 2×10^{-6} m, et un cheveu 10^{-4} m de diamètre.

$$\frac{10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} = 0,5 \times 10^2 = 50 :$$

le diamètre d'un cheveu vaut environ cinquante bactéries mises bout à bout.

Méthode 5 — Contrôler la cohérence d'un résultat

Un calcul avec des puissances se vérifie en deux temps : le chiffre a doit rester entre 1 et 10, et l'exposant doit s'obtenir par une addition ou une soustraction d'exposants — jamais par un produit.