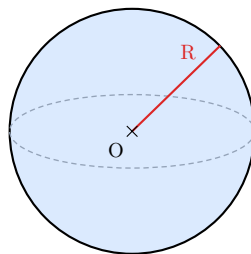


Grandeurs composées, volumes et conversions d'unités

I - Volume de la boule et formules du cycle

Définitions

Une **sphère** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de O : c'est une surface. La **boule** est le solide plein qu'elle délimite.



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

la sphère est la surface, la boule est le solide plein

aire de la sphère : $4 \pi R^2$

Fig. 1. – La boule de centre O et de rayon R .

Formules — Sphère et boule

$$V_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\text{sphère}} = 4 \pi R^2.$$

Formules — Les volumes du cycle

Solide	Volume
Cube d'arête a	a^3
Pavé droit	$L \times l \times h$
Prisme droit	$\mathcal{A}_{\text{base}} \times h$
Cylindre de révolution	$\pi R^2 h$
Pyramide	$\frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$
Cône de révolution	$\frac{1}{3} \pi R^2 h$
Boule	$\frac{4}{3} \pi R^3$

Remarque

Les trois familles se retiennent ensemble : les solides « droits » ont un volume « base $\times$ hauteur », les solides « pointus » en ont le tiers, et la boule fait bande à part.

Exemple

Une boule de rayon 6 cm a pour volume

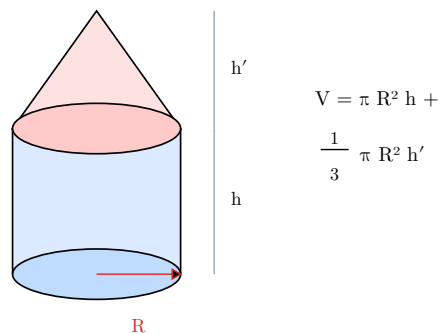
$$V = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = \frac{4}{3}\pi \times 216 = 288\pi \approx 905 \text{ cm}^3.$$

La valeur exacte s'écrit avec π ; la valeur approchée s'obtient à la calculatrice, en précisant l'arrondi. Les deux réponses sont acceptables, mais elles ne s'écrivent pas de la même façon.

II - Volumes d'assemblages

Méthode 1 — Calculer le volume d'un solide composé

1. Décomposer le solide en solides usuels.
2. Repérer les dimensions de chacun, en vérifiant qu'elles sont dans la même unité.
3. Calculer chaque volume séparément.
4. Additionner — ou soustraire, si un solide est creusé dans un autre.



le volume d'un assemblage est la somme des volumes

Fig. 2. — Un cylindre surmonté d'un cône : le volume total est la somme des deux.

Exemple — Un silo

Un silo est formé d'un cylindre de rayon 2 m et de hauteur 5 m, surmonté d'un cône de même rayon et de hauteur 3 m.

On sait que

Le volume total est la somme des deux volumes.

Or

$$V_{\text{cylindre}} = \pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi \text{ et } V_{\text{cône}} = \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 3 = 4\pi.$$

Donc

$$V = 24\pi \approx 75 \text{ m}^3, \text{ soit environ } 75 \text{ 000 litres.}$$

Exemple — Un solide creusé

Dans un cube d'arête 10 cm, on perce un cylindre de rayon 2 cm traversant le cube de part en part.

$$V = 10^3 - \pi \times 2^2 \times 10 = 1\,000 - 40\pi \approx 874 \text{ cm}^3.$$

III - Grandeurs produits et grandeurs quotients

Définition 1

Une **grandeur composée** s'obtient en multipliant ou en divisant deux grandeurs. Son unité se construit de la même façon.

Exemples — Des grandeurs quotients

- Une **vitesse** est une distance divisée par une durée : km/h, m/s.
- Un **débit** est un volume divisé par une durée : L/min, m³/s.
- Une **masse volumique** est une masse divisée par un volume : kg/m³, g/cm³.
- Une **concentration** est une masse divisée par un volume : g/L.

Exemples — Des grandeurs produits

- Une **énergie** est une puissance multipliée par une durée : le kilowattheure, kW · h.
- Une **aire** est un produit de deux longueurs : le mètre carré.

Formules

$$v = \frac{d}{t}, \quad d = v \times t, \quad t = \frac{d}{v}.$$

Méthode 2 — Utiliser une grandeur composée

1. Écrire la formule qui la définit.
2. Vérifier que les unités des données correspondent à celle de la grandeur.
3. Convertir si nécessaire **avant** de calculer.
4. Donner le résultat avec son unité.

Exemple — Une vitesse moyenne

Un cycliste parcourt 63 km en 2 h 30 min.

On sait que

$$2 \text{ h } 30 \text{ min} = 2,5 \text{ h}.$$

Or

$$v = \frac{63}{2,5}.$$

Donc

$$v = 25,2 \text{ km/h}.$$

2 h 30 min ne vaut pas 2,3 h : les durées ne sont pas décimales. Il faut convertir en heures décimales avant tout calcul.

Exemple — Une masse volumique

Un bloc de 2,7 kg occupe 1 dm³.

$$\rho = \frac{2,7}{1} = 2,7 \text{ kg/dm}^3 = 2,7 \text{ g/cm}^3 :$$

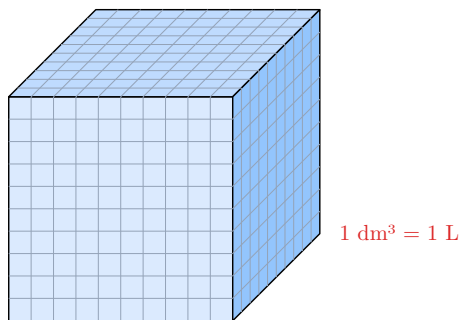
c'est de l'aluminium.

IV - Conversions d'unités de volume

Propriété 1

Un rapport k sur les longueurs donne un rapport k^2 sur les aires et k^3 sur les volumes. Pour les unités décimales, k vaut 10 :

$$1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm} \quad \text{donc} \quad 1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3.$$



$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} \quad \text{donc} \quad 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$$

un rapport 10 sur les longueurs donne un rapport 1 000 sur les volumes

Fig. 3. – Le cube d'arête 1 dm contient dix rangées de dix piles de dix cubes d'arête 1 cm.

Formules — Les équivalences à connaître

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}, \quad 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}, \quad 1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}.$$

Exemples

- $2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^6 \text{ cm}^3 = 2\,500\,000 \text{ cm}^3.$
- $450 \text{ cm}^3 = 0,45 \text{ L}.$
- $0,02 \text{ m}^3 = 20 \text{ dm}^3 = 20 \text{ L}.$

Méthode 3 — Convertir un volume

1. Écrire le rapport entre les deux unités de longueur, comme puissance de 10.
2. L'élever au cube.
3. Multiplier ou diviser par ce facteur.

Remarque

Le tableau de conversion des volumes comporte **trois** colonnes par unité, contre deux pour les aires et une pour les longueurs. C'est la traduction, en colonnes, des exposants 1, 2 et 3.

V - Conversions sur les grandeurs composées

Méthode 4 — Convertir une grandeur composée

Convertir séparément le numérateur et le dénominateur, puis effectuer le quotient.

Exemple — Des km/h aux m/s

On sait que

1 km = 1 000 m et 1 h = 3 600 s.

Or

$$90 \text{ km/h} = \frac{90 \times 1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}}.$$

Donc

90 km/h = 25 m/s. Le facteur de conversion est 3,6 : on divise par 3,6 pour passer des km/h aux m/s.

Exemple — Des m³/s aux L/min

On sait que

1 m³ = 1 000 L et 1 min = 60 s.

Or

0,05 m³/s = 0,05 × 1 000 L/s = 50 L/s.

Donc

50 × 60 = 3 000 L/min.

Exemple — Un débit et une durée

Une piscine de 48 m³ se remplit à 200 L/min. Combien de temps ?

On sait que

48 m³ = 48 000 L.

Or

$t = 48 \frac{000}{200} = 240 \text{ min}.$

Donc

Le remplissage dure 4 heures.

Méthode 5 — Vérifier la cohérence des unités

Le contrôle final porte toujours sur l'unité : une longueur ne peut pas répondre à une question sur un volume, et un résultat en m/s de l'ordre de plusieurs centaines pour un piéton signale une erreur de conversion.

Une réponse sans unité est incomplète ; une réponse avec une unité incohérente est fausse, même si le calcul est juste.