

Espace : solides, sections planes et repérage sur la sphère

I - Représenter les solides du cycle

Vocabulaire

Un **polyèdre** est un solide dont toutes les faces sont des polygones. Le cube, le pavé droit, le prisme droit et la pyramide en sont ; le cylindre, le cône et la boule n'en sont pas.

Définition 1

La **perspective cavalière** représente un solide en conservant en vraie grandeur les faces parallèles au plan de la feuille. Les arêtes fuyantes sont tracées parallèlement entre elles, réduites, et les arêtes cachées sont en pointillés.

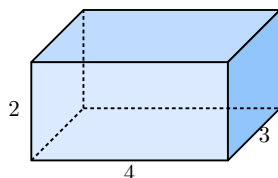


Fig. 1. – Un pavé droit en perspective cavalière.

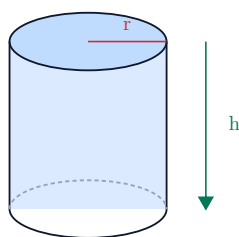


Fig. 2. – Un cylindre de révolution : les disques de base se dessinent en ellipses.

Définition 2

Un **patron** d'un solide est une figure plane qui, pliée le long de certains segments, reconstitue exactement le solide.

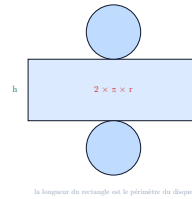


Fig. 3. – Le patron d'un cylindre : deux disques et un rectangle dont la longueur est le périmètre du disque.

Définitions

Un solide se décrit aussi par ses **vues** :

- la vue de **face**, celle de l'observateur ;
- la vue de **dessus**, à la verticale ;
- la vue de **côté** ;
- la vue **en coupe**, qui montre l'intérieur.

Méthode 1 — Passer d'une représentation à une autre

1. Compter les faces, les arêtes et les sommets sur chaque représentation : les nombres doivent coïncider.
2. Repérer les longueurs conservées : elles sont en vraie grandeur sur le patron et sur les vues, pas toujours en perspective.
3. Contrôler la cohérence : deux vues suffisent rarement à identifier un solide, trois suffisent presque toujours.

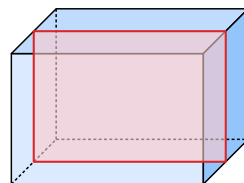
II - Sections planes

Définition 3

La **section** d'un solide par un plan est la figure obtenue à l'intersection du solide et du plan : c'est ce qu'on voit sur la tranche quand on coupe le solide.

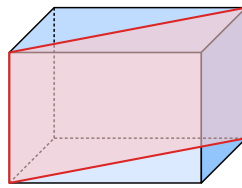
Propriétés — Section d'un pavé droit

- Par un plan **parallèle à une face**, la section est un rectangle identique à cette face.
- Par un plan **parallèle à une arête**, la section est un rectangle dont une dimension est celle de l'arête.



plan parallèle à une face : la section est ce rectangle

Fig. 4. – Une section parallèle à une face : le rectangle obtenu est superposable à cette face.

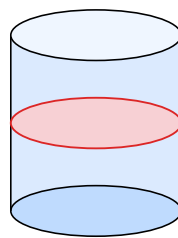


plan parallèle à une arête : la section est un rectangle

Fig. 5. – Une section parallèle à une arête verticale.

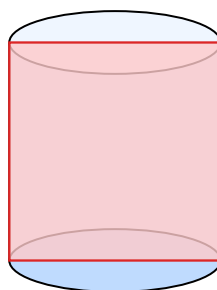
Propriétés — Sections des solides de révolution

- **Cylindre** coupé parallèlement aux bases : un disque de même rayon ; coupé par un plan contenant l'axe : un rectangle.
- **Cône** coupé parallèlement à la base : un disque plus petit, dont le rayon est proportionnel à la distance au sommet.
- **Pyramide** coupée parallèlement à la base : un polygone de même forme, réduction de la base.
- **Sphère** coupée par un plan : un cercle, d'autant plus petit que le plan s'éloigne du centre.



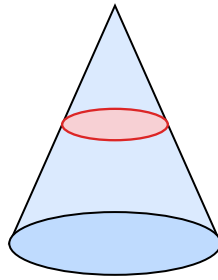
cylindre coupé par un plan parallèle aux bases : un disque de même rayon

Fig. 6. – Le cylindre coupé parallèlement aux bases.



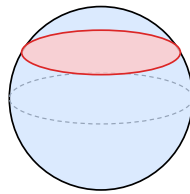
cylindre coupé par un plan contenant l'axe : un rectangle

Fig. 7. – Le même cylindre, coupé par un plan contenant son axe.



cône coupé parallèlement à la base : un disque plus petit

Fig. 8. – Le cône coupé parallèlement à sa base : la section est une réduction du disque de base.



sphère coupée par un plan : un cercle, plus petit si le plan s'éloigne du centre

Fig. 9. – La sphère coupée par un plan.

La section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base est une réduction de cette base : c'est le chapitre des homothéties qui donne le rapport, et donc l'effet sur les aires et les volumes.

III - Utiliser un logiciel de géométrie dans l'espace

Protocole

1. Construire le solide à partir de ses dimensions.
2. Le faire tourner pour identifier les arêtes cachées et vérifier la perspective dessinée à la main.
3. Définir un plan, puis demander la section : le logiciel affiche la figure obtenue.
4. Déplacer le plan et observer comment la section se déforme.

Remarque

Le logiciel sert à **conjecturer** : il montre que la section d'un cône se réduit à mesure que le plan monte. Il ne démontre rien ; c'est le théorème de Thalès qui donne le rapport.

IV - Repérage sur la sphère

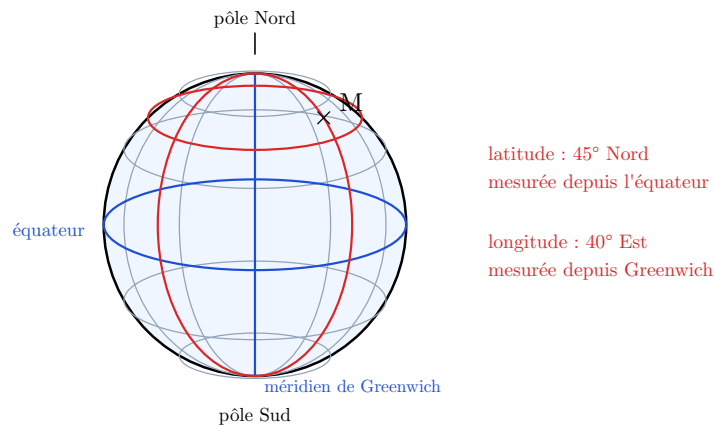
Définitions

Sur une sphère :

- un **grand cercle** est un cercle de même centre et de même rayon que la sphère ;
- les **méridiens** sont des demi-grands cercles joignant les deux pôles ;

- les **parallèles** sont les cercles obtenus en coupant la sphère par un plan perpendiculaire à l'axe des pôles.

L'équateur est le seul parallèle qui soit un grand cercle. Tous les méridiens en sont.



les grands cercles ont pour centre celui de la sphère : l'équateur et tous les méridiens

Fig. 10. — Un point de la sphère est repéré par sa latitude et sa longitude.

Définitions

- La **latitude** d'un point est l'angle, compris entre 0° et 90° , mesuré depuis l'équateur, suivi de Nord ou Sud.
- La **longitude** est l'angle, compris entre 0° et 180° , mesuré depuis le méridien de Greenwich, suivi de Est ou Ouest.

Exemples

- Paris : 49° Nord, 2° Est.
- Quito : 0° , 78° Ouest — sur l'équateur.
- Le pôle Nord : 90° Nord ; sa longitude n'a pas de sens.

Méthode 2 — Lire des coordonnées géographiques

- Repérer le parallèle du point : il donne la latitude, Nord au-dessus de l'équateur, Sud en dessous.
- Repérer son méridien : il donne la longitude, Est à droite de Greenwich, Ouest à gauche.
- Toujours donner les deux, avec leur lettre.

V - Calculs dans une section

Méthode 3 — Calculer une longueur dans une section

- Dessiner la section en vraie grandeur, à plat.
- Y repérer un triangle rectangle.
- Appliquer le théorème de Pythagore, ou celui de Thalès si la section provient d'une réduction.

Exemple — Le rayon d'une section de sphère

Une sphère de rayon 10 cm est coupée par un plan situé à 6 cm de son centre.

On sait que

Le rayon de la sphère, la distance au plan et le rayon de la section forment un triangle rectangle.

Or

$$r^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64.$$

Donc

$r = 8$ cm : la section est un cercle de rayon 8 cm, d'aire $64\pi \approx 201$ cm².

Exemple — Une section de cône

Un cône a une base de rayon 9 cm et une hauteur de 12 cm. On le coupe à 4 cm du sommet, parallèlement à la base.

On sait que

La section est une réduction de la base, de rapport $k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Or

Le rayon de la section vaut $9 \times \frac{1}{3} = 3$ cm.

Donc

Son aire vaut 9π cm², soit $\frac{1}{9}$ de l'aire de la base — le carré du rapport.

Exemple — La diagonale d'une section de pavé

Un pavé droit a pour dimensions 6 cm, 8 cm et 5 cm. La section par un plan parallèle à la face 6×8 est un rectangle de 6 cm sur 8 cm.

Sa diagonale mesure $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm, et son aire 48 cm².

Méthode 4 — Contrôler un résultat

Le rayon d'une section est toujours inférieur au rayon du solide, et l'aire d'une section de cône est toujours inférieure à celle de la base. Un résultat qui viole ces bornes signale une erreur.