

TROISIÈME

Mathématiques

Sommaire

1. Arithmétique : nombres premiers et fractions irréductibles	3
2. Triangle rectangle : Pythagore, racine carrée et trigonométrie	10
3. Calcul littéral : double distributivité et identités remarquables	19
4. Statistiques	26
5. Équations, équations produits et équation $x^2 = a$	32
6. Théorème de Thalès et triangles semblables	38
7. Notion de fonction : vocabulaire, notations et représentations	44
8. Programmation : variables, boucles et blocs personnalisés	50
9. Probabilités et simulation	54
10. Rotations : frises, pavages et rosaces	59
11. Proportionnalité, fonctions linéaires et pourcentages d'évolution	64
12. Homothéties, agrandissement-réduction et effet sur les grandeurs	69
13. Fonctions affines	74
14. Puissances, notation scientifique et ordres de grandeur	79
15. Grandeurs composées, volumes et conversions d'unités	84
16. Espace : solides, sections planes et repérage sur la sphère	90

Chapitre 1

Arithmétique : nombres premiers et fractions irréductibles

I - Multiples, diviseurs et division euclidienne

Définition 1

Soient a et b deux nombres entiers, avec $a \neq 0$. Dire que a est un **diviseur** de b , c'est dire que b est un **multiple** de a : il existe un entier k tel que $b = k \times a$.

Remarque

Les deux mots décrivent la même situation, vue des deux côtés : $15 = 3 \times 5$ signifie à la fois que 3 est un diviseur de 15 et que 15 est un multiple de 3.

Exemples

- 3 est un diviseur de 15, car $15 = 3 \times 5$.
- 7 est un diviseur de 21, car $21 = 7 \times 3$.
- 1 est un diviseur de 43, car $43 = 1 \times 43$.
- 78 est un diviseur de 78, car $78 = 78 \times 1$.

Propriété 1

Tout entier n non nul admet au moins deux diviseurs : 1 et n .

Définition 2

Effectuer la **division euclidienne** d'un entier b par un entier $a \neq 0$, c'est trouver les deux entiers q (le **quotient**) et r (le **reste**) tels que

$$b = a \times q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < a.$$

$$\begin{array}{r|l}
 255 & 16 \\
 - 16 & 15 \\
 \hline
 & 95 \\
 - 80 & \\
 \hline
 & 15
 \end{array}$$

Fig. 1. – La division euclidienne posée : le quotient au-dessous du diviseur, le reste en bas.

Propriété 2

a est un diviseur de b si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de b par a est nul.

Méthode 1 — Chercher tous les diviseurs d'un entier

1. Essayer les diviseurs 1, 2, 3, ... dans l'ordre croissant.
2. Chaque fois qu'un diviseur d convient, noter aussi le diviseur associé $n \div d$: les diviseurs vont par paires.
3. S'arrêter dès que $d \times d$ dépasse n : au-delà, on retrouverait les mêmes paires dans l'autre sens.

Exemple — Les diviseurs de 36

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6.$$

Comme $7 \times 7 = 49 > 36$, la recherche est terminée : les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

II - Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10

Propriétés — Critères de divisibilité

Divisible par	Critère	Exemples
2	le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8	174 175
3	la somme des chiffres est divisible par 3	174 $\rightarrow 1 + 7 + 4 = 12$ 175 $\rightarrow 1 + 7 + 5 = 13$
5	le chiffre des unités est 0 ou 5	175 174
9	la somme des chiffres est divisible par 9	549 $\rightarrow 5 + 4 + 9 = 18$ 174 $\rightarrow 1 + 7 + 4 = 12$
10	le chiffre des unités est 0	1 740 174

Remarque

Un nombre divisible par 9 est toujours divisible par 3, puisque $9 = 3 \times 3$; la réciproque est fautive, comme le montre 12. De même, un nombre divisible par 10 est divisible par 2 et par 5.

Exemple — Un nombre passé au crible des critères

Prenons 2 340 :

- il se termine par 0, donc il est divisible par 2, par 5 et par 10 ;
- $2 + 3 + 4 + 0 = 9$, donc il est divisible par 3 et par 9.

III - Nombres premiers

Définition 3

Un entier est **premier** s'il est supérieur ou égal à 2 et s'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même. Sinon, il est dit **composé**.

Remarque

1 n'est pas un nombre premier : il n'a qu'un seul diviseur, lui-même. Ce n'est pas un caprice de vocabulaire, mais la condition pour que la décomposition de la partie suivante soit unique.

Exemples

- 17 est premier : il ne s'écrit que 1×17 .
- 15 est composé : $15 = 3 \times 5$.
- 24 est composé : $24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$.

Protocole — Le crible d'Ératosthène

1. Écrire les entiers de 1 à 100 dans un tableau de dix colonnes.
2. Barrer 1, qui n'est pas premier.
3. Entourer 2, puis barrer tous les autres multiples de 2.
4. Recommencer avec le premier nombre non barré suivant : 3, puis 5, puis 7.
5. $11 \times 11 = 121 > 100$: tout ce qui reste est premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

les multiples de 2, 3, 5 et 7 sont barrés

Fig. 2. – Les multiples de 2, 3, 5 et 7 barrés ; il reste les nombres premiers.

Les 25 nombres premiers inférieurs à 100 sont à connaître :

Formule

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Méthode 2 — Décider si un nombre est premier

Essayer de le diviser par les nombres premiers successifs 2, 3, 5, 7, 11, ... et s'arrêter dès que le carré du diviseur essayé dépasse le nombre.

Exemple

131 est-il premier ? Il n'est divisible ni par 2 (il est impair), ni par 3 ($1 + 3 + 1 = 5$), ni par 5 (il ne finit ni par 0 ni par 5), ni par 7 ($131 = 7 \times 18 + 5$), ni par 11 ($131 = 11 \times 11 + 10$). Comme $13 \times 13 = 169 > 131$, la recherche s'arrête : 131 est premier.

IV - Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème 1 — Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier supérieur ou égal à 2 s'écrit comme un produit de nombres premiers, et cette écriture est **unique** à l'ordre des facteurs près.

Méthode 3 — Décomposer à la main

1. Diviser le nombre par le plus petit nombre premier qui le divise.
2. Recommencer avec le quotient obtenu.
3. S'arrêter quand le quotient vaut 1 : les diviseurs utilisés sont les facteurs premiers cherchés.

on divise par...	...un nombre premier
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

on s'arrête quand il reste 1

Fig. 3. – La décomposition de 360 posée en potence.

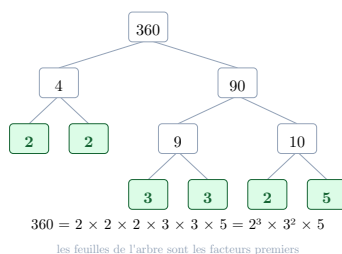


Fig. 4. – La même décomposition présentée en arbre : chaque nombre composé est cassé en deux facteurs.

Exemples

- $219 = 3 \times 73$
- $110 = 2 \times 5 \times 11$

- $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$
- $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

Notation

Un facteur répété s'écrit avec un exposant : $625 = 5^4$ et $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Protocole — Décomposer avec un tableur

1. En A1, écrire le nombre à décomposer.
2. En B1, écrire $=A1/2$, et recopier la formule vers le bas tant que le résultat est entier.
3. Changer de diviseur dès qu'un résultat n'est plus entier.
4. La fonction $=MOD(A1;2)$ donne le reste : elle vaut 0 exactement quand la division tombe juste.

Protocole — Décomposer avec un programme

Le même travail s'écrit avec une boucle :

d ← 2
tant que n > 1 :
...si le reste de n par d est 0 :
.....afficher d
.....n ← n / d
...sinon :
.....d ← d + 1

V - Fractions égales et fraction irréductible**Propriété 3**

Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie, ou quand on divise, son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}.$$

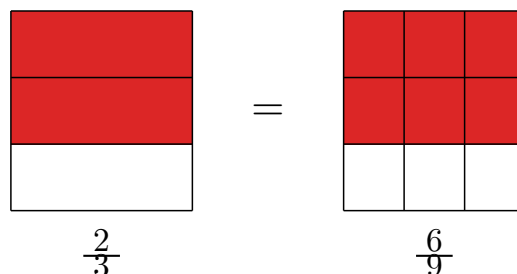


Fig. 5. — Deux écritures différentes d'une même fraction.

Définition 4

Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont plus aucun diviseur commun autre que 1 : elle ne peut plus être simplifiée.

Méthode 4 — Rendre une fraction irréductible

1. Décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.
2. Barrer les facteurs communs aux deux.
3. Effectuer les produits restants.

Exemple

$$\frac{66}{30} = \frac{2 \times 3 \times 11}{2 \times 3 \times 5} = \frac{11}{5}.$$

Comme 11 et 5 sont premiers, la fraction $\frac{11}{5}$ est irréductible.

Exemple

$$\frac{12}{51} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 17} = \frac{4}{17}.$$

Remarque

Les critères de divisibilité suffisent souvent : 12 et 51 ont leurs sommes de chiffres divisibles par 3, donc on peut diviser les deux par 3 sans décomposer complètement.

Propriété 4

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si, et seulement si, $a \times d = b \times c$.

Exemple

$$\frac{12}{18} \text{ et } \frac{26}{39} : 12 \times 39 = 468 \quad \text{et} \quad 18 \times 26 = 468,$$

donc ces deux fractions sont égales — elles valent toutes deux $\frac{2}{3}$.

VI - Problèmes de divisibilité**Exemple — Des engrenages**

Une roue de 12 dents engrène avec une roue de 18 dents ; un repère est tracé sur chacune, les deux repères se faisant face au départ.

On sait que

Les repères se retrouvent face à face lorsque le nombre de dents passées est à la fois un multiple de 12 et un multiple de 18.

Or

$36 = 12 \times 3 = 18 \times 2$, et aucun multiple commun plus petit n'existe.

Donc

La petite roue aura fait 3 tours, la grande 2 tours.

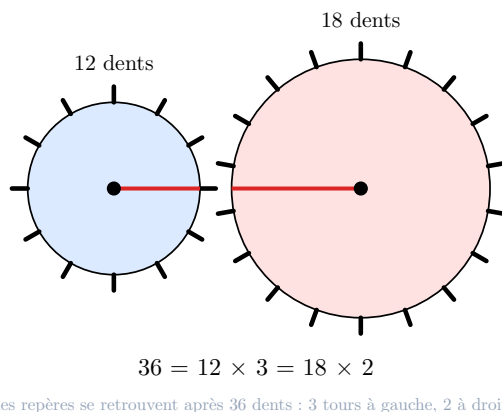


Fig. 6. – Deux roues engrenées : les repères se retrouvent après 36 dents.

Exemple — Une conjonction de phénomènes

Un phare émet un éclat toutes les 12 secondes, un autre toutes les 20 secondes ; ils viennent d'éclairer ensemble.

On sait que

Les éclats coïncident aux instants multiples de 12 et de 20.

Or

$12 = 2^2 \times 3$ et $20 = 2^2 \times 5$; le plus petit multiple commun est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Donc

Ils éclaireront de nouveau ensemble au bout d'une minute.

Exemple — Un partage

On veut répartir 84 crayons et 126 feutres en lots identiques, sans reste.

On sait que

Le nombre de lots doit être un diviseur commun de 84 et de 126.

Or

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$; leurs facteurs communs donnent $2 \times 3 \times 7 = 42$.

Donc

Au maximum 42 lots, de 2 crayons et 3 feutres chacun.

Chapitre 2

Triangle rectangle : Pythagore, racine carrée et trigonométrie

I - Racine carrée d'un nombre

Définition 1

Le **carré** d'un nombre est ce nombre multiplié par lui-même. Il se note avec un 2 en exposant :
 $a^2 = a \times a$.

Définition 2

Soit a un nombre positif. La **racine carrée** de a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré vaut a :

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Remarque

Prendre la racine carrée est l'opération réciproque d'élever au carré, comme soustraire l'est d'additionner. Un nombre négatif n'a pas de racine carrée : aucun carré n'est négatif.

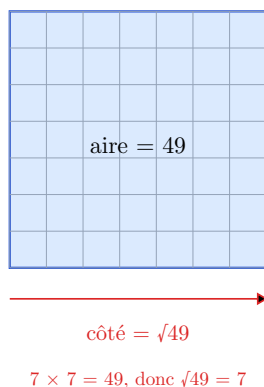


Fig. 7. – Un carré d'aire 49 a pour côté $\sqrt{49} = 7$.

Exemples

- $\sqrt{144} = 12$, car $12 \times 12 = 144$.
- $\sqrt{64} = 8$, car $8 \times 8 = 64$.
- $\sqrt{2,25} = 1,5$, car $1,5 \times 1,5 = 2,25$.
- $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.

Les carrés parfaits de 1 à 144 sont à connaître par cœur :

Formule

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Définition 3

Un nombre entier est un **carré parfait** lorsque sa racine carrée est un entier.

Méthode 1 — Valeur exacte, valeur approchée

Quand a n'est pas un carré parfait, $\sqrt{a}$ ne s'écrit pas exactement avec des chiffres : on garde $\sqrt{a}$ comme **valeur exacte**, et la calculatrice en donne une **valeur approchée**.

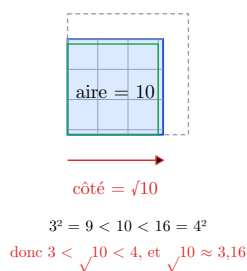


Fig. 8. – $\sqrt{10}$ est coincé entre 3 et 4, puisque $9 < 10 < 16$.

Exemple

$3^2 = 9$ et $4^2 = 16$; comme $9 < 10 < 16$, on a $3 < \sqrt{10} < 4$. La calculatrice affiche $\sqrt{10} \approx 3,162$.

Écrire $\sqrt{10} = 3,16$ est faux : le signe $\approx$ est obligatoire dès qu'on arrondit.

II - Théorème de Pythagore**Définition 4**

Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit.

Propriété 1

L'hypoténuse est toujours le plus long des trois côtés.

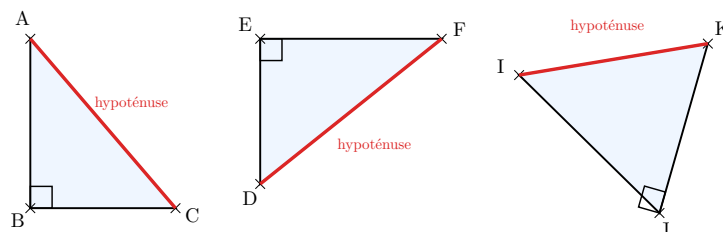


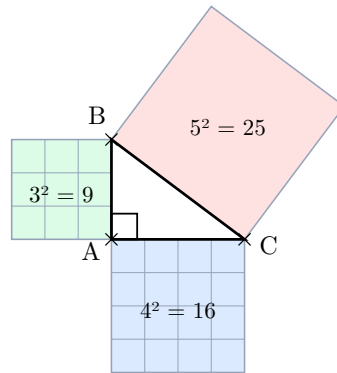
Fig. 9. – L'hypoténuse se lit sur la figure : c'est le côté qui fait face à l'angle droit, quelle que soit la position du triangle.

Théorème 1 — Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, si ABC est rectangle en A , alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

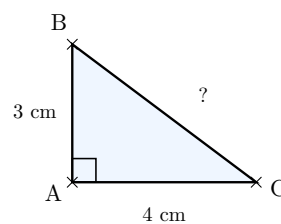


$$9 + 16 = 25$$

Fig. 10. – Sur un triangle rectangle de côtés 3 et 4 : les carrés construits sur les côtés de l'angle droit totalisent exactement le carré de l'hypoténuse.

Méthode 2 — Calculer l'hypoténuse

1. Repérer l'angle droit, donc l'hypoténuse.
2. Écrire l'égalité de Pythagore.
3. Remplacer par les longueurs connues et calculer les carrés.
4. Prendre la racine carrée du résultat.



on cherche l'hypoténuse

Fig. 11. – Les deux côtés de l'angle droit sont connus : on cherche l'hypoténuse.

Exemple — Chercher l'hypoténuse

On sait que

ABC est rectangle en A , avec $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm.

Or

D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Donc

$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$

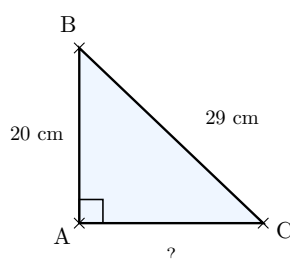
$$BC^2 = 9 + 16$$

$$BC^2 = 25$$

$$BC = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

Méthode 3 — Calculer un côté de l'angle droit

L'égalité s'écrit toujours dans le même sens, mais c'est une **soustraction** qui la résout : le carré cherché est celui de l'hypoténuse moins l'autre.



on cherche un côté de l'angle droit

Fig. 12. — L'hypoténuse et un côté de l'angle droit sont connus : on cherche le troisième côté.

Exemple — Chercher un côté de l'angle droitOn sait que

ABC est rectangle en A , avec $BC = 29 \text{ cm}$ et $AB = 20 \text{ cm}$.

Or

D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Donc

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = 29^2 - 20^2$$

$$AC^2 = 841 - 400$$

$$AC^2 = 441$$

$$AC = \sqrt{441} = 21 \text{ cm.}$$

Remarque

Le résultat n'est pas toujours entier. Pour $AB = 5$ et $AC = 7$: $BC^2 = 25 + 49 = 74$, donc $BC = \sqrt{74} \approx 8,6 \text{ cm}$.

III - Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème 2 — Réciproque du théorème de Pythagore

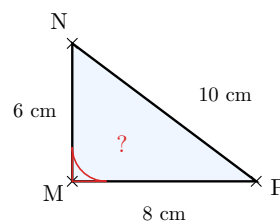
Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres, alors ce triangle est rectangle, et son angle droit est opposé au plus grand côté.

Remarque

Le théorème sert à calculer une longueur dans un triangle dont on **sait** qu'il est rectangle ; sa réciproque sert à démontrer qu'un triangle **est** rectangle. Ce ne sont pas les mêmes usages.

Méthode 4 — Déterminer la nature d'un triangle

1. Repérer le plus grand côté.
2. Calculer son carré d'un côté.
3. Calculer la somme des carrés des deux autres, de l'autre côté.
4. Comparer : égalité, le triangle est rectangle ; sinon, il ne l'est pas.



l'angle droit est à démontrer

Fig. 13. – Les trois longueurs sont connues : l'angle droit reste à démontrer.

Exemple — Un triangle rectangle

MNP a pour côtés $MN = 6$ cm, $MP = 8$ cm et $NP = 10$ cm.

On sait que

Le plus grand côté est $[MP]$.

Or

$$MP^2 = 10^2 = 100 \text{ et } MN^2 + NP^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100.$$

Donc

Ces deux résultats sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, MNP est rectangle en N .

Exemple — Un triangle qui ne l'est pas

RST a pour côtés $RS = 5$ cm, $ST = 6$ cm et $RT = 8$ cm.

On sait que

Le plus grand côté est $[RT]$.

Or

$RT^2 = 64$, tandis que $RS^2 + ST^2 = 25 + 36 = 61$.

Donc

$64 \neq 61$: le triangle RST n'est pas rectangle.

IV - Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Le théorème de Pythagore relie les trois longueurs d'un triangle rectangle. La trigonométrie, elle, relie les longueurs aux **angles**.

Définitions

Dans un triangle rectangle, chaque angle aigu détermine trois côtés :

- l'**hypoténuse**, toujours la même, opposée à l'angle droit ;
- le **côté adjacent** à l'angle, celui qui le borde ;
- le **côté opposé** à l'angle, celui qui lui fait face.

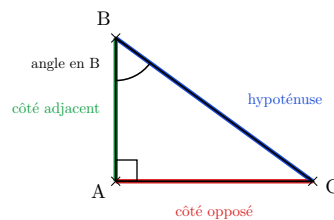


Fig. 14. – Les trois côtés vus depuis l'angle en B .

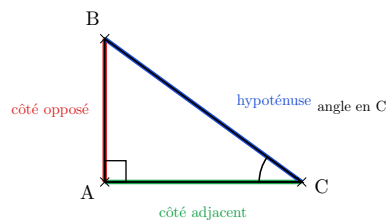


Fig. 15. – La même figure vue depuis l'angle en C : adjacent et opposé ont échangé leurs rôles.

« **Adjacent** » et « **opposé** » ne sont pas des propriétés du côté, mais du couple formé par le côté et l'angle choisi.

Définitions

Soit x un angle aigu d'un triangle rectangle. On pose

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \sin x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Méthode 5 — Retenir les trois quotients

Le moyen mnémotechnique usuel se lit en trois syllabes : **CAH** — **SOH** — **TOA**, soit $\text{Cosinus} = \text{Adjacent} / \text{Hypoténuse}$, $\text{Sinus} = \text{Opposé} / \text{Hypoténuse}$, $\text{Tangente} = \text{Opposé} / \text{Adjacent}$.

Propriétés

Pour tout angle aigu x :

$$0 < \cos x < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \sin x < 1.$$

Un cosinus supérieur à 1 signale une erreur de calcul.

Remarque

Ces trois nombres ne dépendent que de la mesure de l'angle, pas de la taille du triangle : deux triangles rectangles ayant le même angle aigu ont les mêmes cosinus, sinus et tangente.

V - Calculer une longueur, calculer une mesure d'angle**Méthode 6 — Choisir la bonne ligne trigonométrique**

1. Repérer l'angle sur lequel on travaille, et nommer les trois côtés relativement à lui.
2. Entourer les deux côtés qui interviennent : celui qu'on connaît et celui qu'on cherche.
3. Choisir le quotient qui met en jeu exactement ces deux côtés.

Exemple — Calculer une longueur

Dans ABC rectangle en A , on donne $BC = 7$ cm et $\widehat{ABC} = 40^\circ$. On cherche AB .

On sait que

Vu de l'angle en B , $[AB]$ est le côté adjacent et $[BC]$ l'hypoténuse.

Or

$$\cos 40^\circ = \frac{AB}{BC}.$$

Donc

$$AB = 7 \times \cos 40^\circ \approx 5,4 \text{ cm.}$$

Exemple — Calculer une mesure d'angle

Dans ABC rectangle en A , on donne $AB = 3$ cm et $BC = 5$ cm. On cherche la mesure de l'angle en B .

On sait que

$[AB]$ est le côté adjacent à cet angle, $[BC]$ est l'hypoténuse.

Or

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

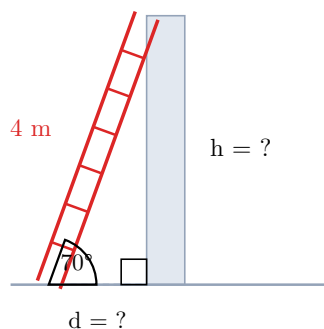
Donc

La touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice donne $\widehat{ABC} \approx 53^\circ$.

Protocole — Sur la calculatrice

1. Vérifier que la calculatrice est en mode degré (DEG à l'écran).
2. Pour une longueur : utiliser les touches $\cos$, $\sin$, $\tan$.
3. Pour un angle : utiliser les touches $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$, souvent accessibles avec la touche 2nde.

VI - Problèmes mêlant Pythagore et trigonométrie



$$\sin 70^\circ = h \div 4 \text{ et } \cos 70^\circ = d \div 4$$

Fig. 16. – Une échelle de 4 m appuyée contre un mur, faisant un angle de 70° avec le sol.

Exemple — L'échelle**On sait que**

Le triangle formé par le sol, le mur et l'échelle est rectangle ; l'échelle en est l'hypoténuse.

Or

$$\sin 70^\circ = \frac{h}{4} \text{ et } \cos 70^\circ = \frac{d}{4}.$$

Donc

La hauteur atteinte est $h = 4 \times \sin 70^\circ \approx 3,8$ m, et le pied de l'échelle est à $d = 4 \times \cos 70^\circ \approx 1,4$ m du mur.

Remarque

Le contrôle de vraisemblance est immédiat : la hauteur atteinte doit être inférieure à la longueur de l'échelle. Une valeur supérieure à 4 m signalerait une erreur de touche.

Exemple — La diagonale d'un rectangle

Un écran rectangulaire mesure 60 cm sur 34 cm.

On sait que

La diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 60 et 34.

Or

$$d^2 = 60^2 + 34^2 = 3600 + 1156 = 4756.$$

Donc

$$d = \sqrt{4756} \approx 69 \text{ cm, soit environ 27 pouces.}$$

Exemple — Une rampe d'accès

Une rampe doit franchir une marche de 12 cm de haut avec une pente d'au plus 5° .

On sait que

La hauteur est le côté opposé à l'angle de pente, la longueur de la rampe en est l'hypoténuse.

Or

$$\sin 5^\circ = \frac{12}{L}, \text{ donc } L = \frac{12}{\sin 5^\circ}.$$

Donc

$$L \approx 138 \text{ cm : il faut une rampe d'au moins 1,38 m.}$$

Méthode 7 — Rédiger une résolution

Toute réponse s'appuie sur trois temps : ce qu'on sait de la figure, la propriété invoquée, puis la conclusion chiffrée avec son unité. Les valeurs approchées gardent le signe $\approx$ et un arrondi annoncé.

Chapitre 3

Calcul littéral : double distributivité et identités remarquables

I - Structure d'une expression : somme ou produit

Définition 1

La **structure** d'une expression littérale, c'est la dernière opération qu'on effectuerait pour la calculer : une expression est une **somme** ou un **produit**.

Méthode 1 — Reconnaître la structure

1. Repérer les parenthèses : ce qu'elles contiennent forme un bloc.
2. Chercher, hors des parenthèses, l'opération de plus faible priorité.
3. Une addition ou une soustraction hors parenthèses : c'est une somme. Sinon, c'est un produit.

Exemples

- $3x + 5$ est une somme de deux termes : $3x$ et 5 .
- $3(x + 5)$ est un produit de deux facteurs : 3 et $(x + 5)$.
- $(x + 2)(x - 7)$ est un produit.
- $(x + 2) + x^2$ est une somme.
- $2x^2 - 5x + 1$ est une somme de trois termes.

Remarque

Cette lecture commande tout le chapitre : **développer**, c'est transformer un produit en somme ; **factoriser**, c'est transformer une somme en produit.

Définition 2

Réduire une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes possible, en regroupant les **termes semblables** — ceux qui ont la même partie littérale.

Exemples

- $5x + 3x = 8x$
- $7x^2 - 2x^2 = 5x^2$
- $4x + 3 + 2x - 8 = 6x - 5$
- $3x + 2x^2$ ne se réduit pas : x et x^2 ne sont pas semblables.

Convention

On n'écrit ni le signe $\times$ devant une lettre ou une parenthèse, ni le coefficient 1 : $3 \times x$ s'écrit $3x$, et $1 \times x$ s'écrit x .

II - Opposé d'une expression littérale

Définition 3

L'**opposé** d'une expression A est l'expression $-A$, celle qu'il faut lui ajouter pour obtenir 0.

Propriété 1

L'opposé d'une somme s'obtient en changeant le signe de **chaque** terme :

$$-(a + b) = -a - b \quad \text{et} \quad -(a - b) = -a + b.$$

Exemples

- L'opposé de $3x + 5$ est $-3x - 5$.
- L'opposé de $2x - 7$ est $-2x + 7$.
- L'opposé de $-x^2 + 4x - 1$ est $x^2 - 4x + 1$.

L'erreur la plus fréquente du chapitre consiste à ne changer que le premier signe : $-(2x - 7)$ vaut $-2x + 7$, jamais $-2x - 7$.

Exemple — Supprimer une parenthèse précédée d'un moins

$$3(2x + 1) - (6 - x) = 6x + 3 - 6 + x = 7x - 3.$$

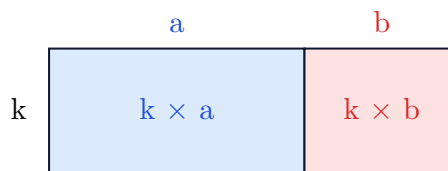
III - Simple distributivité : développer et factoriser

Propriété 2 — Simple distributivité

Pour tous nombres k , a et b :

$$k(a + b) = ka + kb \quad \text{et} \quad k(a - b) = ka - kb.$$

Lue de gauche à droite, l'égalité **développe** ; lue de droite à gauche, elle **factorise**.



$$k(a + b) = ka + kb$$

Fig. 17. — Le rectangle de largeur k et de longueur $a + b$ se coupe en deux : son aire s'écrit des deux façons.

Exemples — Développer

- $5(x + 3) = 5x + 15$

- $-4x(6 - 3x) = -24x + 12x^2$
- $3(2x + 1) - 2(x - 4) = 6x + 3 - 2x + 8 = 4x + 11$

Méthode 2 — Factoriser avec un facteur commun

1. Repérer le facteur commun à tous les termes de la somme.
2. L'écrire devant une parenthèse.
3. Dans la parenthèse, écrire ce qui reste de chaque terme.

Exemples — Factoriser

- $6x + 15 = 3(2x + 5)$
- $x^2 - 7x = x(x - 7)$
- $(x + 1)(x + 4) + (x + 1)(2x - 3) = (x + 1)(3x + 1)$, le facteur commun étant la parenthèse $(x + 1)$.

IV - Double distributivité

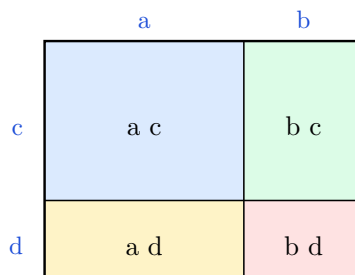
Propriété 3 — Double distributivité

Pour tous nombres a , b , c et d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Pour mieux comprendre

Chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde : il y a donc toujours **quatre** produits à écrire avant de réduire.



$$(a + b)(c + d) = a c + a d + b c + b d$$

Fig. 18. — Le rectangle de dimensions $a + b$ et $c + d$ se découpe en quatre : une aire par produit.

Exemples

- $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$
- $(2x - 3)(5x + 7) = 10x^2 + 14x - 15x - 21 = 10x^2 - x - 21$
- $(x - 4)(x - 1) = x^2 - x - 4x + 4 = x^2 - 5x + 4$

Méthode 3 — Contrôler un développement

Remplacer x par un nombre simple, par exemple 1 ou 2, dans l'expression de départ et dans le résultat : les deux valeurs doivent coïncider.

Exemple

Pour $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$, prenons $x = 1$: à gauche $3 \times 6 = 18$, à droite $1 + 7 + 10 = 18$ cohérent.

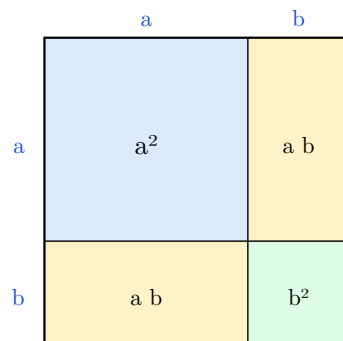
V - Identités remarquables

Formules — Les trois identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

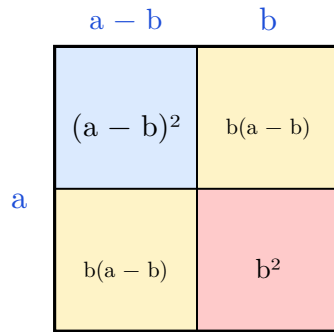
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



$$(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2$$

Fig. 19. — $(a + b)^2$: le carré de côté $a + b$ contient a^2 , b^2 et deux rectangles ab .



$$a^2 = (a - b)^2 + 2b(a - b) + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Fig. 20. — $(a - b)^2$: ce qui reste du carré de côté a quand on retire deux bandes — le coin b^2 , retiré deux fois, doit être rajouté.

$(a + b)^2$ n'est pas $a^2 + b^2$: le double produit $2ab$ manque. Pour $a = 3$ et $b = 4$: $(3 + 4)^2 = 49$, alors que $9 + 16 = 25$.

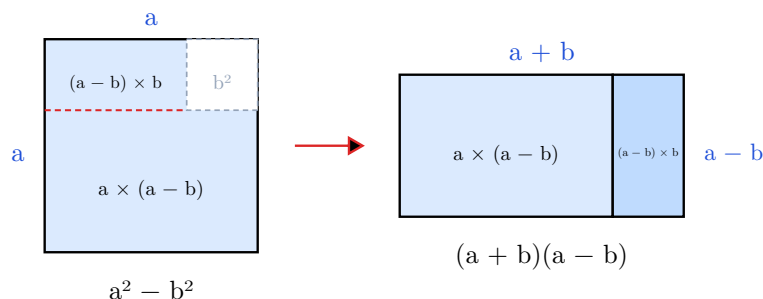
Exemples — Développer

- $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$
- $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
- $(x + 6)(x - 6) = x^2 - 36$
- $(2x - 5)(2x + 5) = 4x^2 - 25$

Remarque

La troisième identité fait disparaître le terme en x : c'est la seule dont le développement n'a que deux termes.

VI - Factoriser une expression de la forme $a^2 - b^2$



$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Fig. 21. — L'équerre $a^2 - b^2$, recoupée puis recollée, forme le rectangle $(a + b)(a - b)$.

Méthode 4 — Reconnaître une différence de deux carrés

1. Vérifier que l'expression est une **soustraction**.
2. Écrire chacun des deux termes comme un carré : a^2 et b^2 .
3. Appliquer $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Exemples

- $x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x + 8)(x - 8)$
- $4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2 = (2x + 7)(2x - 7)$
- $25 - x^2 = 5^2 - x^2 = (5 + x)(5 - x)$
- $(x + 1)^2 - 9 = (x + 1)^2 - 3^2 = (x + 4)(x - 2)$

Remarque

Une **somme** de deux carrés, comme $x^2 + 9$, ne se factorise pas de cette façon.

VII - Démontrer par le calcul littéral

Une vérification sur quelques nombres ne prouve rien : la lettre, elle, représente tous les nombres à la fois. C'est ce qui fait du calcul littéral un outil de démonstration.

Méthode 5 — Démontrer une propriété générale

1. Nommer par une lettre le nombre quelconque de l'énoncé.
2. Traduire l'énoncé par une expression.
3. Développer, réduire, factoriser jusqu'à faire apparaître la forme annoncée.

Exemple — La somme de trois entiers consécutifs**On sait que**

Trois entiers consécutifs s'écrivent $n - 1$, n et $n + 1$, où n est un entier.

Or

Leur somme vaut $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$.

Donc

Cette somme est toujours un multiple de 3.

Exemple — La différence des carrés de deux entiers consécutifs**On sait que**

Deux entiers consécutifs s'écrivent n et $n + 1$.

Or

$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.

Donc

Cette différence est toujours un nombre impair — et c'est même la somme des deux entiers.

Méthode 6 — Démontrer l'équivalence de deux programmes de calcul

1. Choisir une lettre pour le nombre de départ, la même pour les deux programmes.
2. Traduire chaque programme par une expression.
3. Développer et réduire les deux : si l'on obtient la même expression, les programmes donnent toujours le même résultat.

Exemple — Deux programmes

Programme A	Programme B
Choisir un nombre.	Choisir un nombre.
Lui ajouter 3.	Le multiplier par 2.
Multiplier le résultat par 2.	Ajouter 8 au résultat.
Soustraire 2.	

On sait que

Soit x le nombre choisi.

Or

Le programme A donne $2(x + 3) - 2 = 2x + 6 - 2 = 2x + 4$, et le programme B donne $2x + 8$.

Donc

$2x + 4 \neq 2x + 8$: les deux programmes ne donnent jamais le même résultat, ils diffèrent toujours de 4.

Exemple — Deux programmes équivalents

Programme C : choisir x , l'augmenter de 5, élever au carré, retrancher 25.

Programme D : choisir x , l'élever au carré, ajouter 10 fois le nombre choisi.

On sait que

C donne $(x + 5)^2 - 25$ et D donne $x^2 + 10x$.

Or

$(x + 5)^2 - 25 = x^2 + 10x + 25 - 25 = x^2 + 10x$.

Donc

Les deux programmes sont équivalents : ils donnent le même résultat pour tout nombre choisi.

Chapitre 4

Statistiques

I - Effectifs et fréquences

Vocabulaire

Une étude statistique porte sur une **population**, dont chaque élément est un **individu**. On observe sur chacun un **caractère**, qui prend différentes **valeurs**.

Définitions

- L'**effectif** d'une valeur est le nombre d'individus qui la présentent.
- L'**effectif total** est le nombre d'individus de la population.
- La **fréquence** d'une valeur est le quotient

$$f = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}.$$

Remarque

Une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1 ; multipliée par 100, elle s'exprime en pourcentage. La somme de toutes les fréquences vaut 1, soit 100%.

Exemple — Les notes d'un contrôle

Note	8	10	12	14	16	Total
Effectif	2	5	8	7	3	25
Fréquence	0,08	0,2	0,32	0,28	0,12	1

La fréquence de la note 12 vaut $\frac{8}{25} = 0,32$, soit 32% des élèves.

Méthode 1 — Retrouver un effectif à partir d'une fréquence

L'effectif est le produit de la fréquence par l'effectif total :

$$\text{effectif} = f \times \text{effectif total}.$$

II - Indicateurs de position : moyenne et médiane

Définition 1

La **moyenne** d'une série est le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total.

Formule — Moyenne d'une série donnée par un tableau d'effectifs

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

où x_i sont les valeurs et n_i leurs effectifs.

Exemple

Avec le tableau des notes :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 8 + 5 \times 10 + 8 \times 12 + 7 \times 14 + 3 \times 16}{25} = \frac{308}{25} = 12,32.$$

Définition 2

La **médiane** d'une série est une valeur qui partage la série rangée dans l'ordre croissant en deux groupes de même effectif : au moins la moitié des valeurs lui sont inférieures ou égales, au moins la moitié lui sont supérieures ou égales.

Méthode 2 — Déterminer la médiane

1. Ranger toutes les valeurs dans l'ordre croissant, en répétant celles qui apparaissent plusieurs fois.
2. Si l'effectif est impair, la médiane est la valeur centrale.
3. S'il est pair, la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales.



Fig. 22. – Sept valeurs : la médiane est la quatrième.

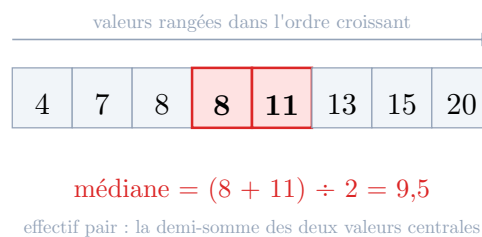


Fig. 23. – Huit valeurs : la médiane est la demi-somme de la quatrième et de la cinquième.

Remarque

Moyenne et médiane ne disent pas la même chose. Une valeur très grande tire la moyenne vers le haut sans déplacer la médiane : sur la série 1, 2, 3, 4, 200, la moyenne vaut 42 et la médiane 3.

Exemple — Interpréter une médiane

La médiane des notes du contrôle est 12 : au moins la moitié de la classe a obtenu 12 ou moins, au moins la moitié a obtenu 12 ou plus.

III - Étendue d'une série

Définition 3

L'**étendue** d'une série est la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur.

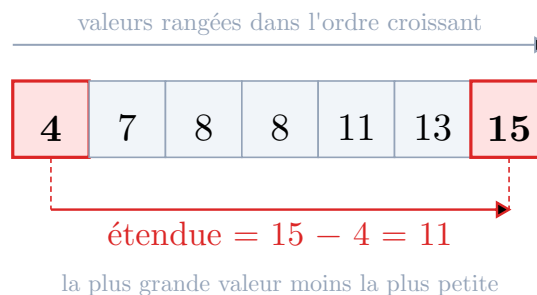


Fig. 24. – L'étendue se lit aux deux extrémités de la série rangée.

Remarque

L'étendue est un indicateur de **dispersion**, et non de position : elle dit si les valeurs sont resserrées ou étalées, pas où elles se situent.

Exemple — Deux séries de même moyenne

Série A	Série B
9, 10, 10, 10, 11	2, 5, 10, 15, 18
moyenne 10, étendue 2	moyenne 10, étendue 16

Même moyenne, même médiane, mais des séries très différentes : seule l'étendue le montre.

IV - Regroupement en classes et histogrammes

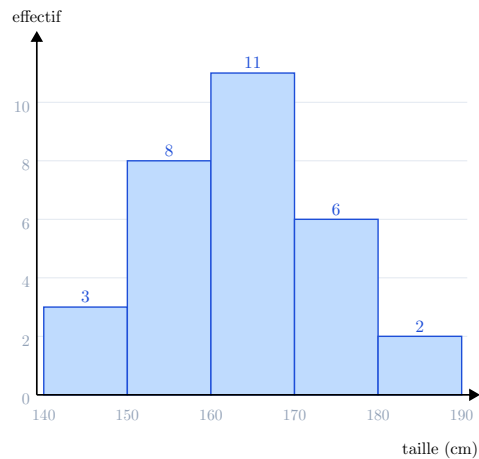
Quand le caractère prend un grand nombre de valeurs — une taille, une durée, une masse — les lister une à une n'apprend rien. On les regroupe alors en **classes**.

Définition 4

Une **classe** est un intervalle de valeurs. Son **amplitude** est sa largeur. Quand toutes les classes ont la même amplitude, les effectifs sont directement comparables.

Définition 5

Un **histogramme** représente une série regroupée en classes : à chaque classe correspond un rectangle, dont la largeur est celle de la classe et la hauteur est proportionnelle à l'effectif. Les rectangles sont **contigus**.



cinq classes de même amplitude (10 cm) : les rectangles se touchent

Fig. 25. – Les tailles de 30 élèves, regroupées en cinq classes de 10 cm.

Un histogramme n'est pas un diagramme en bâtons : les bâtons sont séparés parce que les valeurs sont isolées, les rectangles se touchent parce que les classes se suivent sans trou.

Méthode 3 — Construire un histogramme

1. Choisir des classes de même amplitude couvrant toutes les valeurs.
2. Compter l'effectif de chaque classe.
3. Graduer l'axe horizontal par les bornes des classes.
4. Tracer un rectangle par classe, de hauteur proportionnelle à l'effectif.

Remarque

Une fois la série regroupée, les valeurs individuelles sont perdues : la moyenne se calcule alors avec le centre de chaque classe, et ne donne qu'une valeur approchée.

V - Lire et interpréter une représentation

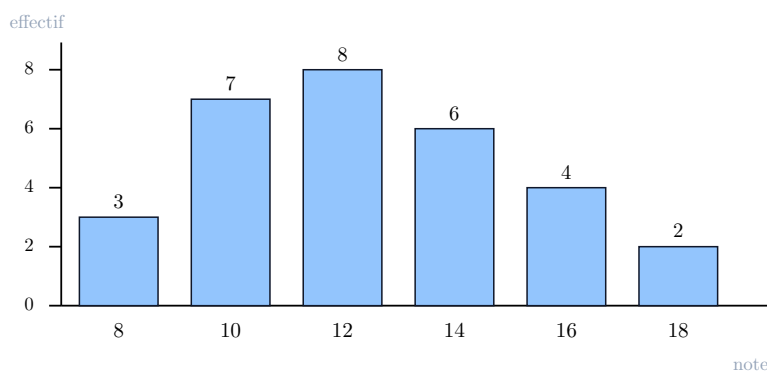


Fig. 26. – Le diagramme en barres : la hauteur de chaque barre est proportionnelle à l'effectif.

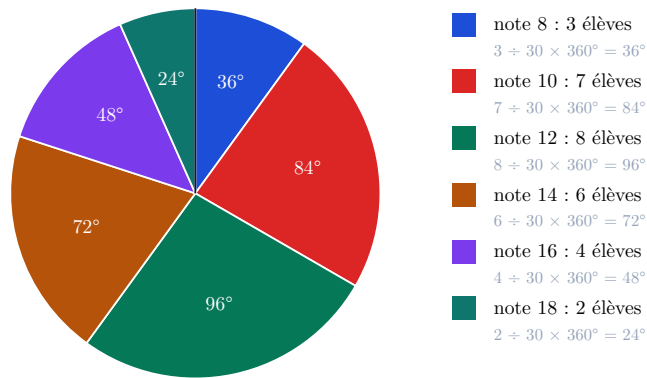


Fig. 27. – Le diagramme circulaire : l'angle de chaque secteur est proportionnel à l'effectif, le tour complet valant 360° .

Méthode 4 — Choisir une représentation

- Un **diagramme en bâtons** convient à un caractère prenant peu de valeurs isolées.
- Un **diagramme circulaire** met en évidence des parts d'un tout.
- Un **histogramme** convient à un caractère regroupé en classes.

Méthode 5 — Lire une série sur un diagramme

Tous les indicateurs se lisent sur n'importe quelle représentation, à condition de reconstituer d'abord le tableau des effectifs : c'est de lui que viennent moyenne, médiane et étendue.

Exemple — Une lecture critique

Un diagramme circulaire montre qu'un candidat obtient un quart des voix ; il ne dit rien du nombre de votants. Un même quart peut représenter 25 voix ou 250 000.

VI - Traitement de données à l'aide d'un tableur

Protocole — Les fonctions utiles

Fonction	Ce qu'elle renvoie
=SOMME (B2 : B8)	la somme des cellules de la plage
=MOYENNE (B2 : B8)	la moyenne des valeurs
=MEDIANE (B2 : B8)	la médiane des valeurs
=MAX (B2 : B8) - MIN (B2 : B8)	l'étendue
=NB (B2 : B8)	l'effectif total

Protocole — Calculer des fréquences

1. Placer les valeurs en colonne A et les effectifs en colonne B.
2. En B9, écrire =SOMME(B2:B8) pour l'effectif total.
3. En C2, écrire =B2/\$B\$9, puis recopier la formule vers le bas.
4. Le symbole \$ fige la cellule B9 pendant la recopie.

Remarque

Pour une série donnée par un tableau d'effectifs, =MOYENNE ne convient pas : il faut écrire =SOMMEPROD(A2:A8;B2:B8)/SOMME(B2:B8), qui multiplie chaque valeur par son effectif.

Chapitre 5

Équations, équations produits et équation $x^2 = a$

I - Mettre un problème en équation

Définitions

Une **équation** est une égalité contenant une lettre, appelée l'**inconnue**. Une **solution** est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie ; **résoudre** l'équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Méthode 1 — Tester si un nombre est solution

1. Calculer séparément le membre de gauche et le membre de droite en remplaçant l'inconnue par ce nombre.
2. Comparer les deux résultats : égaux, le nombre est solution ; différents, il ne l'est pas.

Exemple

L'équation $5x - 3 = 2x + 6$.

- Pour $x = 3$: à gauche $5 \times 3 - 3 = 12$, à droite $2 \times 3 + 6 = 12$ égaux, donc 3 est solution.
- Pour $x = 1$: à gauche 2, à droite 8 différents, donc 1 n'est pas solution.

Méthode 2 — Mettre un problème en équation

1. Choisir l'inconnue, la nommer et préciser ce qu'elle représente avec son unité.
2. Traduire l'énoncé par une égalité entre deux expressions.
3. Résoudre l'équation.
4. Revenir à la question posée, et contrôler la vraisemblance.

Exemple — Un périmètre

Un rectangle a une longueur qui dépasse sa largeur de 4 cm, et un périmètre de 36 cm.

Soit x la largeur, en centimètres. La longueur vaut $x + 4$, et le périmètre $2(x + x + 4) = 36$, soit $4x + 8 = 36$.

II - Résolution algébrique d'une équation du premier degré

Propriété 1 — Règles de transformation

Une équation garde les mêmes solutions lorsqu'on :

- ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres ;
- multiplie ou divise les deux membres par un même nombre non nul.

Pour mieux comprendre

Une équation est une balance en équilibre : tant qu'on agit de la même façon des deux côtés, l'équilibre est conservé.

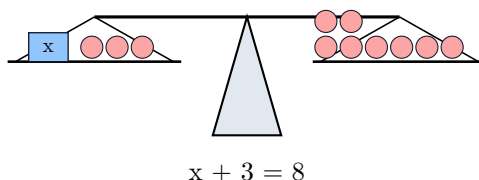


Fig. 28. – Les deux plateaux se valent : c'est ce que dit le signe $=$.

Méthode 3 — Résoudre $a x + b = c x + d$

1. Développer et réduire chaque membre s'il y a des parenthèses.
2. Rassembler les termes en x dans un membre, les nombres dans l'autre.
3. Réduire les deux membres.
4. Diviser par le coefficient de x .
5. Vérifier la solution dans l'équation de départ.

Exemple — Une résolution complète

$$5x - 3 = 2x + 6$$

$$5x - 2x - 3 = 6$$

$$3x = 6 + 3$$

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3} = 3$$

Vérification : $5 \times 3 - 3 = 12$ et $2 \times 3 + 6 = 12$ cohérent. L'équation a une seule solution : 3.

Exemple — Avec des parenthèses

$$3(2x + 1) - (6 - x) = 15$$

$$6x + 3 - 6 + x = 15$$

$$7x - 3 = 15$$

$$7x = 18$$

$$x = \frac{18}{7}$$

La solution n'est pas entière : on la laisse en écriture fractionnaire.

Remarque

Une équation du premier degré peut n'avoir aucune solution ($x + 1 = x + 2$) ou en avoir une infinité ($2(x + 1) = 2x + 2$). Dans les deux cas, les termes en x disparaissent au cours de la résolution.

III - Équations produits

Propriété 2 — Annulation d'un produit

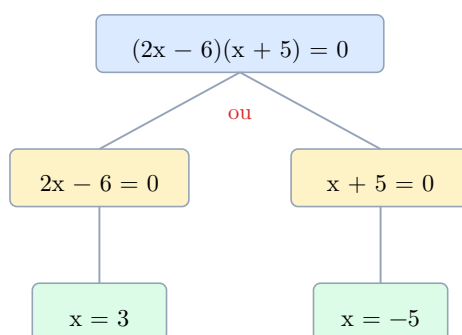
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \text{ équivaut à } A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Cette propriété n'a pas d'équivalent pour une autre valeur : de $A \times B = 12$, on ne peut rien conclure sur A ni sur B .

Définition 1

Une **équation produit** est une équation dont un membre est un produit de facteurs du premier degré, et l'autre membre 0.



deux solutions : 3 et -5

Fig. 29. – L'équation se casse en deux équations du premier degré, chacune donnant une solution.

Méthode 4 — Résoudre une équation produit

1. Vérifier que l'équation est bien de la forme « produit = 0 ».
2. Écrire que le premier facteur est nul **ou** que le second l'est.
3. Résoudre chacune de ces équations.
4. Conclure en donnant toutes les solutions.

Exemple

$$(2x - 6)(x + 5) = 0$$

On sait que

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

Donc

$2x - 6 = 0$ ou $x + 5 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x = -5$.

L'équation a deux solutions : 3 et -5.

Méthode 5 — Se ramener à une équation produit

Lorsque l'équation n'est pas donnée sous forme de produit, il faut d'abord tout ramener dans un membre, puis **factoriser** — souvent grâce à l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Exemple — Par une différence de deux carrés

$$x^2 - 49 = 0$$

$$(x + 7)(x - 7) = 0$$

donc $x = -7$ ou $x = 7$.

Exemple — Avec un facteur commun

$$(x - 2)(3x + 1) + (x - 2)(x - 4) = 0$$

$$(x - 2)(3x + 1 + x - 4) = 0$$

$$(x - 2)(4x - 3) = 0$$

donc $x = 2$ ou $x = \frac{3}{4}$.

IV - Équations de la forme $x^2 = a$

Propriété 3

Soit a un nombre. L'équation $x^2 = a$:

- n'a aucune solution si $a < 0$;
- a une seule solution, 0, si $a = 0$;
- a deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, si $a > 0$.

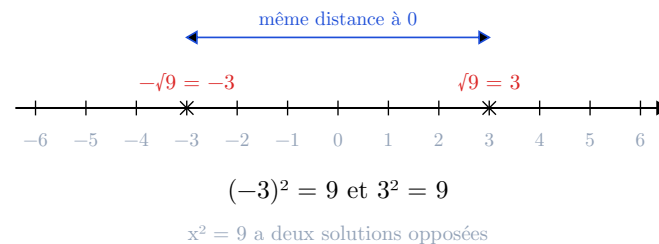


Fig. 30. – Deux nombres opposés ont le même carré : les solutions sont symétriques par rapport à 0.

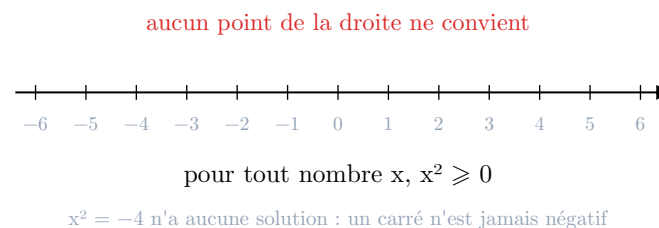


Fig. 31. – Un carré n'étant jamais négatif, l'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution.

Oublier la solution négative est l'erreur classique : $x^2 = 9$ a deux solutions, 3 et -3, et non la seule 3.

Exemples

- $x^2 = 25$ a pour solutions 5 et -5 .
- $x^2 = 7$ a pour solutions $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$, soit environ 2,65 et $-2,65$.
- $x^2 = -1$ n'a pas de solution.
- $4x^2 = 36$ s'écrit $x^2 = 9$: les solutions sont 3 et -3 .

Remarque

On peut aussi passer par une équation produit : $x^2 = 25$ donne $x^2 - 25 = 0$, soit $(x + 5)(x - 5) = 0$. Les deux méthodes donnent évidemment le même résultat.

V - Résoudre des problèmes**Exemple — Un problème de périmètre****On sait que**

Soit x la largeur du rectangle, en centimètres : le périmètre s'écrit $4x + 8 = 36$.

Or

$4x = 28$, donc $x = 7$.

Donc

La largeur vaut 7 cm et la longueur 11 cm. Vérification : $2 \times (7 + 11) = 36$ cohérent.

Exemple — Un problème d'aire

Quel est le côté d'un carré d'aire 144 cm^2 ?

On sait que

Soit c le côté, en centimètres : $c^2 = 144$.

Or

Les solutions de cette équation sont 12 et -12 .

Donc

Une longueur étant positive, le côté mesure 12 cm. La solution négative est écartée par le contexte, non par le calcul.

Résoudre une équation et répondre à un problème sont deux choses différentes : certaines solutions de l'équation peuvent être impossibles dans la situation décrite.

Exemple — Un problème de tarifs

Un club propose deux formules : 120 € d'abonnement puis 2 € la séance, ou 5 € la séance sans abonnement. À partir de combien de séances la première est-elle plus avantageuse ?

On sait que

Soit n le nombre de séances : les deux formules coutent le même prix lorsque $120 + 2n = 5n$.

Or

$120 = 3n$, donc $n = 40$.

Donc

Au-delà de 40 séances, l'abonnement devient plus avantageux.

Exemple — Un problème de physique

Un objet lâché sans vitesse tombe d'une hauteur $h = 5t^2$ mètres au bout de t secondes. Au bout de combien de temps a-t-il chuté de 45 m ?

On sait que

$5t^2 = 45$, donc $t^2 = 9$.

Or

Les solutions sont 3 et -3 .

Donc

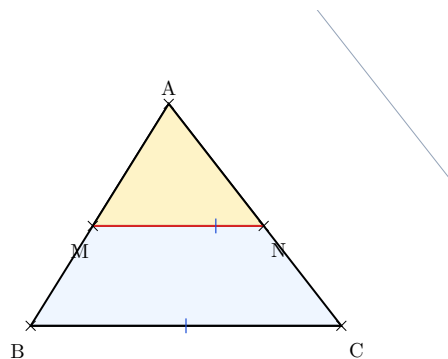
Une durée étant positive, la chute dure 3 secondes.

Chapitre 6

Théorème de Thalès et triangles semblables

I - Le théorème de Thalès dans les triangles emboîtés

Deux droites sécantes coupées par deux parallèles forment une configuration où toutes les longueurs sont proportionnelles. C'est le contenu du théorème de Thalès.



triangles emboîtés

Fig. 32. – Les points M et N sont du même côté de A : les triangles AMN et ABC sont emboîtés.

Théorème 1 — Théorème de Thalès

Soient deux droites sécantes en A . Soient B et M sur la première, C et N sur la seconde, tous distincts de A .

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Les deux premiers quotients se lisent sur la figure : c'est la même fraction du chemin parcouru sur chacune des deux droites. Le troisième quotient, celui des segments parallèles, ne se lit pas de la même façon — il se démontre.

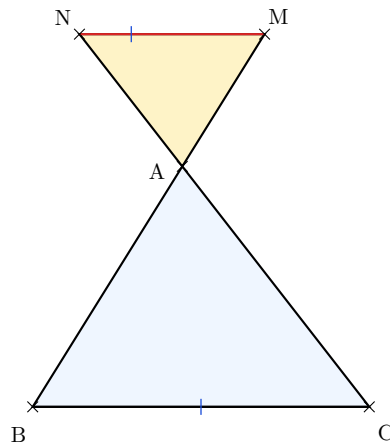
Méthode 1 — Écrire correctement les trois quotients

1. Repérer le sommet commun A .
2. Sur chaque numérateur, mettre la longueur du **petit** triangle ; au dénominateur, celle du **grand**.
3. Vérifier que chaque quotient met en jeu deux points alignés avec A , sauf le troisième, formé des deux segments parallèles.

Remarque

L'ordre des lettres est le garde-fou : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ commencent tous deux par A , et les points M et B sont sur la même droite, comme N et C .

II - La configuration papillon et la réciproque



configuration « papillon »

Fig. 33. – Les points M et N sont de l'autre côté de A : la figure prend la forme d'un papillon, mais le théorème s'énonce exactement de la même façon.

Propriété 1

Le théorème de Thalès s'applique à l'identique dans la configuration papillon : seule change la position des points sur les droites, pas l'égalité des quotients.

Théorème 2 — Réciproque du théorème de Thalès

Soient deux droites sécantes en A , avec B et M sur la première, C et N sur la seconde.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, et si les points A, M, B d'une part, A, N, C d'autre part, sont dans le même ordre, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

La condition sur l'ordre des points est indispensable : sans elle, on pourrait conclure au parallélisme à partir d'une figure où M est du côté de A et N de l'autre.

Méthode 2 — Démontrer que deux droites sont parallèles

1. Vérifier l'alignement et l'ordre des points.
2. Calculer séparément les deux quotients, en écriture décimale ou fractionnaire.
3. Les comparer : égaux, les droites sont parallèles ; différents, elles ne le sont pas.

Exemple — Deux droites parallèles

$AM = 3$, $AB = 5$, $AN = 4,2$, $AC = 7$, les points étant dans le même ordre.

On sait que

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{4,2}{7} = 0,6.$$

Or

Ces quotients sont égaux et les points sont dans le même ordre.

Donc

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple — Deux droites non parallèles

$$AM = 3, AB = 5, AN = 4, AC = 7.$$

On sait que

$$\frac{3}{5} = 0,6 \text{ et } \frac{4}{7} \approx 0,571.$$

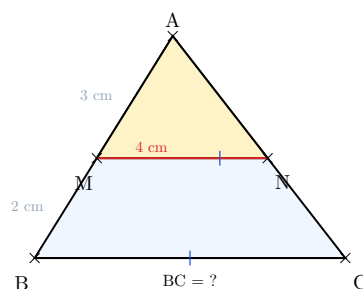
Or

Ces deux quotients sont différents.

Donc

Les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles. Le théorème de Thalès ne s'applique donc pas à cette figure.

III - Calculs de longueurs



triangles emboîtés

Fig. 34. – $AM = 3$ cm, $MB = 2$ cm et $MN = 4$ cm : le théorème de Thalès donne BC .

Méthode 3 — Calculer une longueur avec le théorème de Thalès

1. Vérifier les hypothèses : deux droites sécantes, deux droites parallèles.
2. Écrire la chaîne des trois quotients.
3. Ne garder que les deux quotients où figure la longueur cherchée.
4. Résoudre l'égalité obtenue par le produit en croix.

Exemple — Calculer \$B C\$On sait que

AMN et ABC sont dans une configuration de Thalès, avec (MN) parallèle à (BC) ; $AM = 3$ cm, $AB = 3 + 2 = 5$ cm et $MN = 4$ cm.

Or

D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{3}{5} = \frac{4}{BC}$.

Donc

$$BC = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ cm.}$$

Remarque

L'attention porte sur la longueur AB , qui vaut 5 cm et non 2 cm : la figure donne MB , mais le théorème demande AB .

Exemple — Un calcul dans la configuration papillon

$AM = 4$, $AB = 6$, $MN = 5$. En papillon comme en emboîtés, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, donc $BC = \frac{6 \times 5}{4} = 7,5$.

Méthode 4 — Mesurer l'inaccessible

La configuration de Thalès permet de calculer une longueur qu'aucun instrument n'atteint : hauteur d'un arbre à partir de son ombre, largeur d'une rivière, distance d'un bâtiment. Il suffit de reconnaître deux droites sécantes coupées par deux parallèles.

Exemple — La hauteur d'un arbre

Un piquet de 1,5 m projette une ombre de 2 m au moment où un arbre en projette une de 16 m.

On sait que

Les rayons du soleil sont parallèles : le piquet et l'arbre forment deux triangles emboîtés de même sommet.

Or

$$\frac{h}{1,5} = \frac{16}{2}.$$

Donc

$$h = 1,5 \times 8 = 12 \text{ m.}$$

IV - Triangles semblables**Définition 1**

Deux triangles sont **semblables** lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Propriété 2 — Propriété caractéristique

Deux triangles sont semblables si, et seulement si, les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.

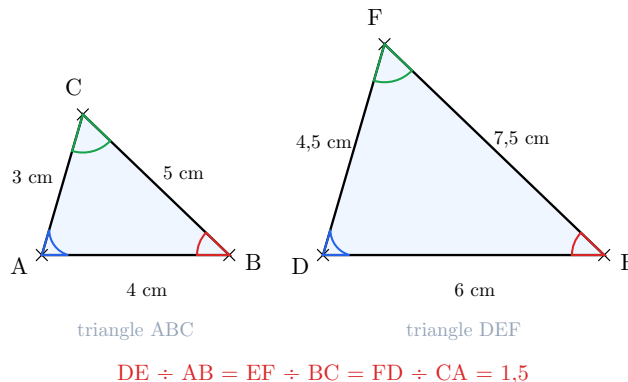


Fig. 35. – DEF est un agrandissement de ABC de rapport 1,5 : mêmes angles, longueurs proportionnelles.

Définition 2

Le **rapport de similitude** est le coefficient de proportionnalité entre les longueurs des deux triangles.

Remarque

Deux triangles semblables ont la même forme mais pas nécessairement la même taille. Quand le rapport vaut 1, ils sont superposables : ils sont alors **isométriques**.

Propriété 3

Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° , il suffit que **deux** angles soient deux à deux égaux pour que les triangles soient semblables : le troisième l'est alors automatiquement.

V - Démontrer que deux triangles sont semblables

Méthode 5 — Deux voies de démonstration

- Par les **angles** : montrer que deux angles de l'un ont la même mesure que deux angles de l'autre.
- Par les **longueurs** : montrer que les trois quotients des côtés correspondants sont égaux.

Exemple — Par les angles

Dans une configuration de Thalès, (MN) étant parallèle à (BC) :

On sait que

Les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Or

Deux angles correspondants formés par des droites parallèles ont la même mesure ; l'angle en A est commun aux deux triangles.

Donc

Les triangles AMN et ABC sont semblables.

Exemple — Par les longueurs

ABC a pour côtés 3, 4 et 5 ; DEF a pour côtés 4,5, 6 et 7,5.

On sait que

$$\frac{4,5}{3} = 1,5, \frac{6}{4} = 1,5 \text{ et } \frac{7,5}{5} = 1,5.$$

Or

Les trois quotients sont égaux.

Donc

Les deux triangles sont semblables, de rapport 1,5.

Méthode 6 — Dédire une longueur de la similitude

1. Repérer les sommets qui se correspondent, en s'aidant des angles égaux.
2. Écrire les quotients des côtés correspondants, dans le même ordre.
3. Résoudre par le produit en croix.

Exemple — Calculer une longueur

ABC et DEF sont semblables, les sommets se correspondant dans cet ordre. On donne $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm et $DE = 9$ cm.

On sait que

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}.$$

Or

$$\frac{9}{6} = \frac{EF}{8}.$$

Donc

$$EF = \frac{8 \times 9}{6} = 12 \text{ cm.}$$

Remarque

Le théorème de Thalès n'est qu'un cas particulier de la similitude : les triangles AMN et ABC y sont toujours semblables. Les deux outils répondent à la même question, celle des longueurs proportionnelles en géométrie.

Chapitre 7

Notion de fonction : vocabulaire, notations et représentations

I - Dépendance entre deux grandeurs

Beaucoup de situations relient deux grandeurs : le prix payé dépend de la quantité achetée, l'aire d'un carré dépend de son côté, la température dépend de l'heure. À chaque valeur de la première correspond une valeur de la seconde, et une seule.

Définition 1

Une **fonction** est un procédé qui, à un nombre, associe **un seul** nombre.

Vocabulaire

Le nombre de départ est la **variable** ; le nombre associé est son **image**. Réciproquement, le nombre de départ est un **antécédent** de son image.

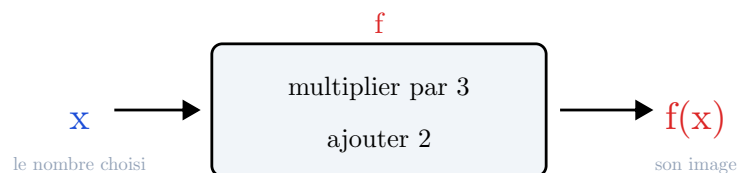


Fig. 36. – Une fonction se comporte comme une machine : un nombre entre, un seul en sort.

« Un seul » est la condition décisive : un nombre a toujours exactement une image, mais il peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

Exemple — Une dépendance qui n'est pas une fonction

Associer à une personne sa taille définit bien une fonction. Associer à une taille une personne n'en définit pas une : plusieurs personnes peuvent avoir la même taille.

II - Notations et vocabulaire

Notation

Une fonction se nomme par une lettre, souvent f , g ou h . On écrit

$$f : x \mapsto 3x + 2,$$

qui se lit « f est la fonction qui à x associe $3x + 2$ ».

Notation

L'image de x par f se note $f(x)$, qui se lit « f de x ». Ce n'est pas un produit.

Exemple

Pour $f : x \mapsto 3x + 2$:

- $f(4) = 3 \times 4 + 2 = 14$;
- l'image de 4 par f est 14 ;
- 4 est un antécédent de 14 par f .

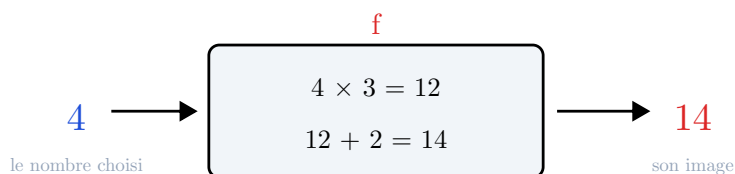


Fig. 37. – La même machine, appliquée au nombre 4.

Image et antécédent ne se rangent pas dans le même sens : dans $f(4) = 14$, le 4 est l'antécédent, le 14 est l'image.

III - Les modes de représentation

Une même fonction peut se donner de quatre façons différentes, qui disent toutes la même chose.

Définitions

- Un **programme de calcul** décrit les opérations à effectuer.
- Une **expression algébrique** traduit ce programme en formule.
- Un **tableau de valeurs** donne les images de quelques nombres.
- Une **représentation graphique** donne toutes les images d'un coup, à la précision de la lecture près.

Exemple — Une fonction, quatre représentations

Représentation	La fonction $f : x \mapsto 3x + 2$										
Programme de calcul	choisir un nombre, le multiplier par 3, ajouter 2										
Expression	$f(x) = 3x + 2$										
Tableau de valeurs	<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-1</td><td>2</td><td>8</td><td>14</td></tr></table>	x	-1	0	2	4	$f(x)$	-1	2	8	14
x	-1	0	2	4							
$f(x)$	-1	2	8	14							
Graphique	la courbe des points de coordonnées $(x; f(x))$										

Définition 2

La **représentation graphique** d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, où x parcourt les nombres pour lesquels f est définie.

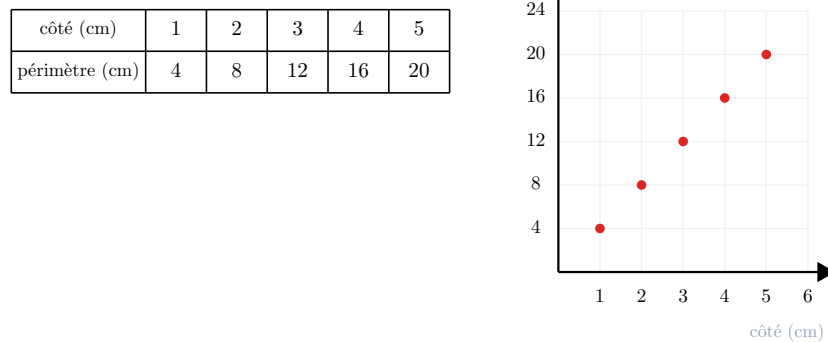


Fig. 38. – Du tableau de valeurs au graphique : chaque colonne devient un point.

Remarque

Passer d'une représentation à l'autre est l'exercice central du chapitre : du programme à l'expression en nommant le nombre choisi x ; de l'expression au tableau en calculant ; du tableau au graphique en plaçant les points.

IV - Déterminer l'image d'un nombre

Méthode 1 — Selon la représentation dont on dispose

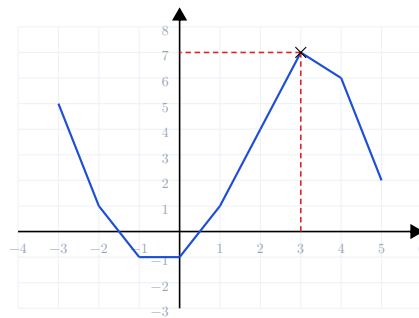
- **Par l'expression** : remplacer x par le nombre et calculer.
- **Par le tableau** : lire dans la colonne du nombre.
- **Par le graphique** : partir de l'abscisse, monter jusqu'à la courbe, lire l'ordonnée.
- **Par le programme** : exécuter les instructions.

Exemple — Par le calcul

Pour $g(x) = x^2 - 5$:

- $g(3) = 3^2 - 5 = 4$;
- $g(0) = -5$;
- $g(-2) = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1$.

Le signe moins se met entre parenthèses avant d'élever au carré : $(-2)^2 = 4$, alors que $-2^2 = -4$.



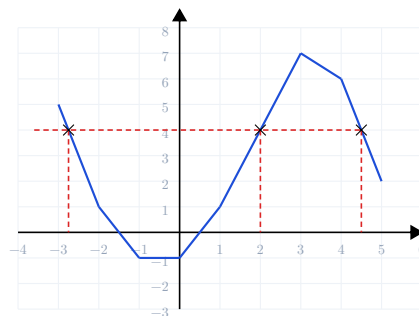
l'image de 3 est 7, notée $f(3) = 7$

Fig. 39. – Lecture d'une image : on part de l'axe des abscisses.

V - Déterminer un antécédent

Méthode 2 — Graphiquement

1. Repérer la valeur cherchée sur l'axe des ordonnées.
2. Tracer l'horizontale à cette hauteur.
3. Lire les abscisses de tous ses points d'intersection avec la courbe.



4 a 3 antécédents : on lit $-2,7$; 2 ; $4,5$

Fig. 40. – Lecture d'antécédents : on part de l'axe des ordonnées, et il peut y en avoir plusieurs.

Méthode 3 — Dans un tableau de valeurs

Chercher la valeur dans la ligne des images, puis lire le nombre écrit au-dessus. Un tableau ne donne que les antécédents qu'il contient : il ne prouve pas qu'il n'y en a pas d'autres.

Méthode 4 — Algébriquement

1. Écrire l'équation $f(x) = k$, où k est le nombre dont on cherche les antécédents.
2. La résoudre.
3. Chaque solution est un antécédent de k .

Exemple — Un antécédent par le calcul

Cherchons les antécédents de 17 par $f : x \mapsto 3x + 2$.

On sait que

Il s'agit de résoudre $3x + 2 = 17$.

Or

$3x = 15$, donc $x = 5$.

Donc

17 a un seul antécédent par f : le nombre 5.

Exemple — Zéro, un ou deux antécédents

Pour $g(x) = x^2$:

- 9 a deux antécédents, 3 et -3 ;
- 0 a un seul antécédent, 0 ;
- -4 n'a aucun antécédent.

VI - Modéliser un phénomène continu

Une fonction sert à décrire un phénomène qui varie sans à-coups : une hauteur d'eau, une distance parcourue, une température. On parle alors de **modèle** : la fonction ne remplace pas la réalité, elle en donne une description utilisable.

Exemple — Le prix d'un trajet en taxi

Une course coûte 4 € de prise en charge, plus 2 € par kilomètre.

Le prix p en fonction de la distance d , en kilomètres, s'écrit

$$p : d \mapsto 2d + 4.$$

Une course de 7 km coûte $p(7) = 18$ €. Réciproquement, une course à 24 € correspond à $2d + 4 = 24$, soit $d = 10$ km.

Exemple — L'aire d'un carré

L'aire d'un carré de côté c est $a : c \mapsto c^2$. Cette fonction n'a de sens que pour $c > 0$: le modèle a un domaine de validité.

Méthode 5 — Résoudre un problème avec une fonction

1. Repérer les deux grandeurs, et laquelle dépend de l'autre.
2. Choisir une lettre pour la variable, et écrire la fonction.
3. Traduire la question : cherche-t-on une image ou un antécédent ?
4. Répondre en revenant au contexte, avec l'unité.

Remarque

« Quelle est la valeur pour telle donnée ? » demande une image. « Pour quelle donnée obtient-on telle valeur ? » demande un antécédent, donc une équation.

Chapitre 8

Programmation : variables, boucles et blocs personnalisés

I - Lire et décrire un assemblage de blocs

Définition 1

Un **script** est une suite d'instructions exécutées dans l'ordre, de haut en bas. Un **programme** est l'ensemble des scripts d'un projet.

Vocabulaire

Un bloc porte une couleur selon sa catégorie : événements, mouvement, contrôle, variables, capteurs. La forme dit comment il s'assemble — un bloc en C contient d'autres blocs.

Méthode 1 — Prévoir le résultat d'un script

1. Lister les variables et noter leur valeur de départ.
2. Exécuter les instructions une à une, en tenant à jour un tableau des valeurs.
3. Ne jamais sauter une instruction : l'ordinateur n'en saute aucune.

Exemple — Une trace d'exécution

Pour le script « mettre a à 5 ; mettre b à 3 ; mettre a à $a + b$; mettre b à $a - b$ » :

Instruction	a	b
mettre a à 5	5	—
mettre b à 3	5	3
mettre a à $a + b$	8	3
mettre b à $a - b$	8	5

II - Variables informatiques

Définition 2

Une **variable** informatique est une case mémoire, désignée par un nom, qui contient une valeur. Cette valeur peut changer au cours de l'exécution.

L'instruction « mettre a à $a + 1$ » n'est pas une équation : elle se lit « remplacer le contenu de a par sa valeur augmentée de 1 ». Le signe d'affectation va de la droite vers la gauche.

Méthode 2 — Utiliser une variable

1. La créer et lui donner un nom qui dit son rôle : score, côté, distance.

2. L'initialiser avant la première utilisation.
3. La modifier avec « mettre ... à ... » ou « ajouter ... à ... ».

Remarque

Oublier l'initialisation est l'erreur la plus fréquente : la variable garde alors la valeur de l'exécution précédente, et le programme ne donne pas deux fois le même résultat.

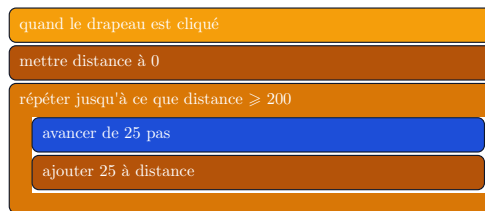
III - Les boucles

Définition 3

Une **boucle bornée** « répéter n fois » exécute un groupe d'instructions un nombre de fois connu à l'avance.

Définition 4

Une **boucle non bornée** « répéter jusqu'à ce que ... » exécute un groupe d'instructions tant qu'une condition n'est pas réalisée. Le nombre de tours n'est pas connu à l'avance.



une boucle non bornée : le nombre de tours dépend de la condition

Fig. 41. – Une boucle non bornée : elle s'arrête quand la condition devient vraie.

Si la condition d'arrêt n'est jamais réalisée, le programme tourne indéfiniment. Toute boucle non bornée demande de vérifier que son corps fait progresser vers l'arrêt.

Exemple — Un polygone régulier

Pour tracer un polygone régulier à n côtés, on répète n fois : avancer de la longueur du côté, puis tourner de $\frac{360}{n}$ degrés. La somme des rotations vaut alors un tour complet.

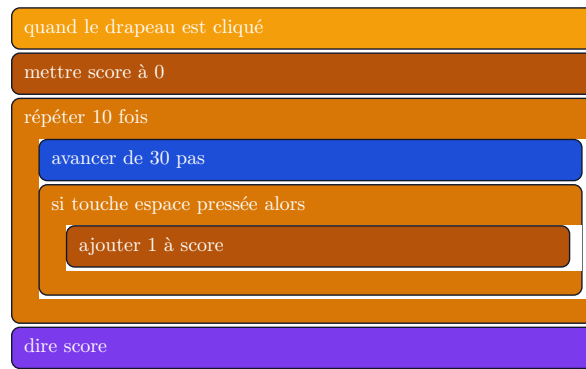
Méthode 3 — Construire une figure par répétition d'un motif

1. Isoler le motif élémentaire, celui qui se répète.
2. L'écrire une fois, en s'assurant qu'il ramène à la position de départ.
3. L'enfermer dans une boucle, en ajoutant le déplacement ou la rotation qui sépare deux motifs.

IV - Les instructions conditionnelles

Définition 5

Une **instruction conditionnelle** « si ... alors » n'exécute son contenu que lorsque la condition est vraie. La forme « si ... alors ... sinon » propose deux issues exclusives.



une boucle bornée, contenant une instruction conditionnelle

Fig. 42. – Une boucle bornée contenant un test : à chaque tour, le score n'augmente que si la touche est pressée.

Exemples — Des conditions

- si score ≥ 10 alors dire « gagné »
- si la couleur rouge est touchée alors mettre vies à vies - 1
- si $x < 0$ alors dire « négatif » sinon dire « positif ou nul »

Remarque

Une condition est une affirmation qui n'a que deux valeurs possibles : vraie ou fausse. C'est ce qui distingue le test = de l'affectation.

V - Décomposer un problème : le bloc personnalisé

Un programme long devient illisible. La solution est la même qu'en mathématiques : découper le problème en sous-problèmes, et donner un nom à chacun.

Définition 6

Un **bloc personnalisé** est une suite d'instructions à laquelle on donne un nom. Une fois défini, il s'utilise comme n'importe quel autre bloc, autant de fois que nécessaire.



à gauche le bloc défini une fois, à droite le script qui l'appelle

Fig. 43. – Le bloc carré est défini une seule fois, avec un paramètre ; le script principal l'appelle six fois pour dessiner une rosace.

Définition 7

Un **paramètre** est une variable propre au bloc, dont la valeur est fournie au moment de l'appel. C'est lui qui rend le bloc réutilisable.

Méthode 4 — Créer un bloc personnalisé

1. Repérer un groupe d'instructions qui revient, ou qui a un sens à lui seul.

2. Lui donner un nom qui dit ce qu'il fait, à l'infinitif ou par un nom d'objet.
3. Ajouter un paramètre pour ce qui change d'un appel à l'autre.
4. Remplacer chaque occurrence par un appel au bloc.

Remarque

Un bloc personnalisé rend le programme plus court, plus lisible, et surtout plus facile à corriger : la modification se fait à un seul endroit.

VI - Scripts en parallèle et évènements

Définition 8

Un **évènement** déclenche un script : le clic sur le drapeau, l'appui sur une touche, la réception d'un message, un contact entre deux objets.

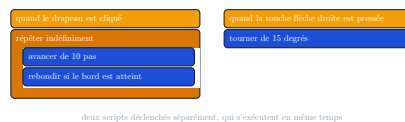


Fig. 44. – Deux scripts indépendants, déclenchés par deux évènements différents et actifs en même temps.

Définition 9

Deux scripts s'exécutent **en parallèle** lorsqu'ils avancent tous les deux, chacun à son rythme, sans que l'un attende l'autre.

Exemple — Un jeu simple

- Script 1 : quand le drapeau est cliqué, répéter indéfiniment, avancer et rebondir sur les bords.
- Script 2 : quand la flèche droite est pressée, tourner de 15 degrés.
- Script 3 : quand le lutin touche le bord rouge, jouer un son et arrêter tout.

Les trois cohabitent : le premier fait vivre le jeu, les deux autres réagissent aux actions du joueur.

Méthode 5 — Faire communiquer deux scripts

- Par un **message** : un script envoie « partie perdue », un autre réagit à sa réception.
- Par une **variable partagée** : un script met vies à 0, un autre teste si `vies = 0` alors.

Remarque

Le parallélisme rend les erreurs plus difficiles à trouver : deux scripts qui modifient la même variable peuvent se gêner. Une variable ne devrait être modifiée que par un seul script.

Chapitre 9

Probabilités et simulation

I - Vocabulaire des expériences aléatoires

Définition 1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, sans pouvoir prévoir lequel se produira.

Vocabulaire

Chaque résultat possible est une **issue**. L'ensemble des issues s'appelle l'**univers** de l'expérience.

Exemples

- Lancer un dé à six faces : six issues, 1 à 6.
- Lancer une pièce : deux issues, pile et face.
- Tirer une carte dans un jeu de 32 : trente-deux issues.

Définition 2

Un **évènement** est un ensemble d'issues, décrit par une phrase. Il est **réalisé** lorsque l'issue obtenue lui appartient.

Exemple

Avec un dé, l'évènement « obtenir un nombre pair » regroupe les issues 2, 4 et 6.

Définition 3

L'**évènement contraire** d'un évènement A , noté « non A », est l'évènement réalisé exactement quand A ne l'est pas.

Propriété 1

$$P(\text{non } A) = 1 - P(A).$$

Remarque

Le contraire de « obtenir au moins un six » est « n'obtenir aucun six », et non « obtenir au plus un six ». Écrire le contraire demande de la précision.

II - Calculer une probabilité par dénombrement

Définition 4

La **probabilité** d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'il se réalise.

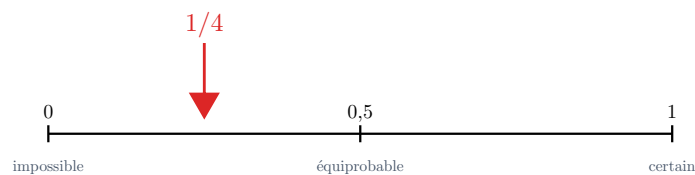


Fig. 45. – Une probabilité se place entre 0 (impossible) et 1 (certain).

Définition 5

Une situation est **équiprobable** lorsque toutes les issues ont la même probabilité.

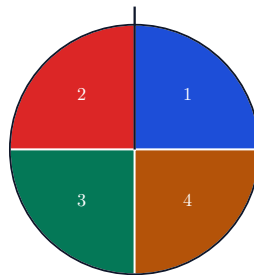


Fig. 46. – Des secteurs de même angle : toutes les issues ont la même probabilité.

Formule — Dans une situation équiprobable

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Exemples

- Avec un dé équilibré, $P(\text{obtenir } 5) = \frac{1}{6}$.
- $P(\text{obtenir un nombre pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- $P(\text{obtenir un nombre inférieur à } 7) = \frac{6}{6} = 1$: l'évènement est certain.
- $P(\text{obtenir } 7) = 0$: l'évènement est impossible.

Méthode 1 — Calculer une probabilité

1. Vérifier que la situation est équiprobable.
2. Compter toutes les issues possibles.
3. Compter celles qui réalisent l'évènement.
4. Écrire le quotient, puis le simplifier.

Exemple — Par l'évènement contraire

Dans une urne de 10 boules dont 3 sont rouges, la probabilité de ne pas tirer de rouge vaut

$$P(\text{non rouge}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

III - Expériences à deux épreuves

Lorsque l'expérience comporte deux épreuves — deux dés, deux tirages, une pièce puis un dé — chaque issue est un **couple** de résultats. Un tableau à double entrée les liste tous.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

6 issues favorables sur 36

chaque case est une issue ; les 36 issues sont équiprobables

Fig. 47. — Les 36 issues du lancer de deux dés, avec la somme obtenue dans chaque case.

Méthode 2 — Dénombrer avec un tableau à double entrée

1. Porter les issues de la première épreuve en colonnes, celles de la seconde en lignes.
2. Remplir chaque case avec le résultat correspondant.
3. Compter les cases favorables : le total des cases est le nombre d'issues.

Les 36 cases sont équiprobables, mais pas les sommes : la somme 7 s'obtient de six façons, la somme 2 d'une seule.

Exemple — La somme de deux dés

On sait que

Le tableau compte 36 issues équiprobables.

Or

Six d'entre elles donnent une somme égale à 7.

Donc

$$P(\text{somme} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

6 issues favorables sur 36

« l'évènement « la somme dépasse 9 » regroupe plusieurs issues »

Fig. 48. – L'évènement « la somme dépasse 9 » : les cases favorables se lisent en bloc.

Exemple — Deux tirages successifs

Une urne contient une boule rouge, une verte et une bleue ; on tire deux boules l'une après l'autre, en remettant la première.

Le tableau à double entrée compte $3 \times 3 = 9$ issues. L'évènement « les deux boules sont de la même couleur » en regroupe 3, donc sa probabilité vaut $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

IV - Simulation

Définition 6

Simuler une expérience aléatoire, c'est la reproduire par un programme ou un tableur, afin de l'observer un grand nombre de fois.

Protocole — Sur un tableur

1. En A1, écrire =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) pour simuler un lancer de dé.
2. Recopier la formule sur 1 000 lignes.
3. En C1, écrire =NB.SI(A1:A1000;6) pour compter les six obtenus.
4. Diviser par 1 000 : on obtient la fréquence du six.
5. La touche F9 recalcule tout et donne une nouvelle simulation.

Protocole — Avec un logiciel de programmation

mettre succès à 0
répéter 1000 fois :
...mettre dé à nombre aléatoire entre 1 et 6
...si dé = 6 alors ajouter 1 à succès
dire succès / 1000

Remarque

Deux exécutions d'une même simulation ne donnent pas le même résultat : c'est normal, et c'est même le propre du hasard. Ce qui se reproduit, c'est l'ordre de grandeur.

V - Stabilisation des fréquences

Propriété 2 — Loi des grands nombres

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'un évènement se rapproche de sa probabilité.

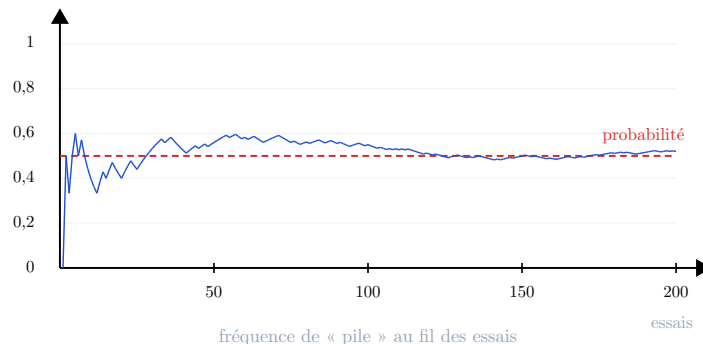


Fig. 49. — La fréquence de « pile » oscille beaucoup au début, puis se stabilise autour de 0,5.

Méthode 3 — Interpréter une simulation

- Sur un petit nombre de lancers, la fréquence peut s'écarter beaucoup de la probabilité : ce n'est pas une anomalie.
- Plus le nombre de lancers augmente, plus l'écart se réduit.
- Une fréquence n'est jamais une preuve : elle donne une estimation.

La loi des grands nombres ne dit rien du prochain lancer. Après cinq piles d'affilée, la probabilité d'obtenir pile reste 0,5 : la pièce n'a pas de mémoire.

Exemple — Estimer une probabilité inconnue

Une punaise lancée 2 000 fois retombe pointe en l'air 1 240 fois. La fréquence vaut 0,62 : on peut estimer que la probabilité de cet évènement est proche de 0,62.

Ici la simulation est le seul outil disponible : aucune symétrie ne permet de calculer cette probabilité par dénombrement.

Chapitre 10

Rotations : frises, pavages et rosaces

I - Symétries et translation : les propriétés de conservation

Définitions

- La **symétrie axiale** d'axe (d) associe à un point M le point M' tel que (d) soit la médiatrice de $[MM']$.
- La **symétrie centrale** de centre O associe à M le point M' tel que O soit le milieu de $[MM']$.
- La **translation** fait glisser toute la figure d'une même distance, dans une même direction et un même sens.

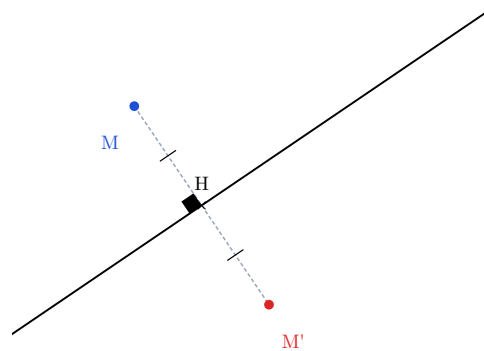
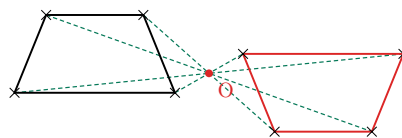
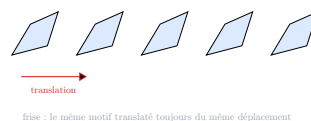


Fig. 50. – La symétrie axiale : le pliage le long de l'axe amène M sur M' .



la figure rouge est l'image de la noire par le demi-tour de centre O

Fig. 51. – La symétrie centrale : un demi-tour autour du centre.



frise : le même motif translaté toujours du même déplacement

Fig. 52. – La translation : le même déplacement répété, sans rotation ni retournement.

Propriétés — Ce que ces transformations conservent

Symétries et translation conservent :

- les **longueurs** ;
- les **mesures d'angles** ;
- les **aires** ;
- l'**alignement**, le **parallélisme** et les **milieux**.

Remarque

La figure image a donc exactement la même forme et la même taille que la figure de départ : ces transformations ne déforment rien. La symétrie axiale est la seule des trois à inverser le sens de parcours de la figure.

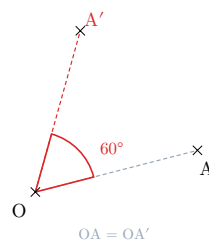
II - La rotation

Définition 1

La **rotation** de centre O , d'angle α et de sens donné associe à tout point M différent de O le point M' tel que

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad \widehat{MOM'} = \alpha,$$

l'angle étant compté dans le sens choisi. Le point O est sa propre image.

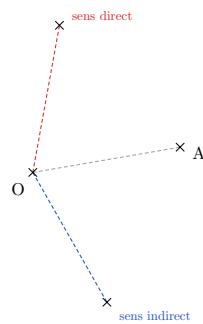


rotation de centre O, d'angle 60° , dans le sens direct

Fig. 53. – L'image d'un point : il reste à la même distance du centre, après un quart, un tiers ou une autre fraction de tour.

Vocabulaire

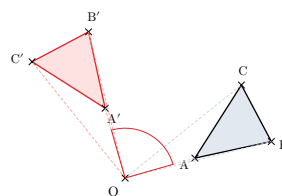
Le **sens direct** est celui inverse des aiguilles d'une montre ; le **sens indirect** est celui des aiguilles.



le sens direct tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

Fig. 54. – Le même angle, les deux sens : les images sont différentes.

Une rotation n'est complètement définie que par ses trois données : centre, angle et sens. En omettre une rend la construction impossible.



la figure entière tourne de 90° autour de O

Fig. 55. – L'image d'une figure s'obtient en construisant l'image de chacun de ses points caractéristiques.

Remarque

La symétrie centrale de centre O n'est rien d'autre que la rotation de centre O et d'angle 180° : le sens n'a alors pas d'importance.

III - Effet d'une rotation sur les grandeurs

Propriétés

Une rotation conserve :

- les longueurs, donc les périmètres ;
- les mesures d'angles ;
- les aires ;
- l'alignement, le parallélisme et les milieux.

L'image d'un segment est un segment de même longueur, l'image d'un cercle un cercle de même rayon, l'image d'un triangle un triangle superposable.

Méthode 1 — Déterminer une longueur ou un angle

Reconnaitre que la figure cherchée est l'image d'une figure connue par une rotation, puis invoquer la conservation : la grandeur cherchée est égale à celle de la figure de départ.

Exemple

$A'B'C'$ est l'image de ABC par une rotation de centre O et d'angle 50° . On donne $AB = 6$ cm, $\widehat{BAC} = 40^\circ$ et une aire de $14,5 \text{ cm}^2$.

On sait que

Une rotation conserve longueurs, angles et aires.

Donc

$A'B' = 6$ cm, $\widehat{B'A'C'} = 40^\circ$, et l'aire de $A'B'C'$ vaut $14,5 \text{ cm}^2$.

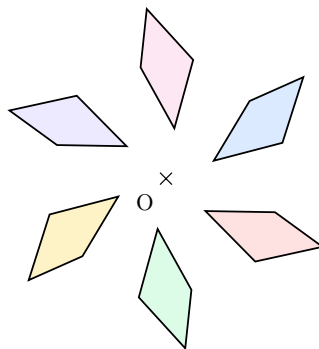
Remarque

Le seul changement est la **position** de la figure. C'est ce qui distingue les rotations des agrandissements et des réductions, étudiés au chapitre suivant.

IV - Reconnaître des rotations dans les frises, pavages et rosaces

Définitions

- Une **frise** est un motif répété le long d'une bande.
- Un **pavage** recouvre tout le plan, sans trou ni recouvrement.
- Une **rosace** s'obtient en tournant un motif autour d'un point.



rosace : six exemplaires du motif, tournés de 60° autour de O

Fig. 56. – Une rosace : six exemplaires du même motif, tournés de 60° à chaque fois.

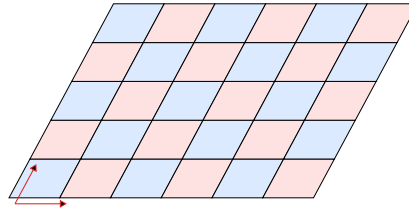
Méthode 2 — Trouver l'angle d'une rosace

Si le motif se répète n fois autour du centre, l'angle de la rotation vaut

$$\alpha = 360 \frac{^\circ}{n}.$$

Exemples

- Un motif répété 6 fois : rotation de 60° .
- Un motif répété 8 fois : rotation de 45° .
- Un motif répété 5 fois : rotation de 72° .



pavage : le même motif traduit selon deux directions, sans trou ni recouvrement

Fig. 57. – Un pavage engendré par deux translations : chaque tuile est l'image d'une autre.

Méthode 3 — Identifier la transformation

1. Repérer le motif élémentaire, le plus petit qui se répète.
2. Comparer deux exemplaires voisins : ont-ils la même orientation ?
3. Même orientation, glissement simple : c'est une translation.
4. Orientation tournée autour d'un point fixe : c'est une rotation.
5. Figure retournée : c'est une symétrie.

V - Constructions

Protocole — Construire à la main l'image d'un point

1. Tracer la demi-droite $[OM)$.
2. Reporter au compas la longueur OM sur un arc de centre O .
3. Au rapporteur, construire l'angle α à partir de $[OM)$, dans le sens demandé.
4. M' est l'intersection de l'arc et du second côté de l'angle.

Protocole — Construire l'image d'une figure

1. Construire l'image de chaque sommet.
2. Relier les images dans le même ordre que la figure de départ.
3. Contrôler : les longueurs doivent être conservées.

Protocole — Avec un logiciel de géométrie dynamique

1. Placer le centre de rotation.
2. Sélectionner l'outil « rotation », puis la figure et le centre.
3. Saisir l'angle, en précisant le sens.
4. Déplacer un point de la figure de départ : l'image suit, ce qui permet de conjecturer les propriétés de conservation.

Remarque

Sur un quadrillage, la construction se simplifie beaucoup pour les angles de 90° et de 180° : les déplacements se comptent en carreaux, en échangeant les rôles des deux directions.

Chapitre 11

Proportionnalité, fonctions linéaires et pourcentages d'évolution

I - Situations de proportionnalité

Définition 1

Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsqu'on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre, appelé **coefficient de proportionnalité**.

Masse (kg)	1	4	7
Prix (€)	3	12	21

Fig. 58. – Un tableau de proportionnalité : le même coefficient relie chaque colonne.

Méthode 1 — Reconnaître une situation de proportionnalité

1. Calculer le quotient de la seconde grandeur par la première, pour chaque couple de valeurs.
2. Tous les quotients égaux : il y a proportionnalité, et ce quotient est le coefficient.
3. Un seul quotient différent suffit à conclure qu'il n'y en a pas.

Exemple

Masse (kg)	2	5	8	12
Prix (€)	4,6	11,5	18,4	27,6

$\frac{4,6}{2} = 2,3$, $\frac{11,5}{5} = 2,3$, $\frac{18,4}{8} = 2,3$: le prix est proportionnel à la masse, au tarif de 2,3 € par kilogramme.

Définition 2

La **quatrième proportionnelle** est la valeur manquante d'un tableau de proportionnalité dont on connaît trois valeurs.

Méthode 2 — Trois façons de la calculer

- Par le **coefficient** : le calculer, puis multiplier.
- Par le **produit en croix** : de $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, on tire $x = \frac{b \times c}{a}$.
- Par la **linéarité** : additionner ou multiplier des colonnes connues.

Exemple

Si 8 kg coutent 18,4 €, combien coutent 14 kg ?

$$x = \frac{14 \times 18,4}{8} = 32,2 \text{ €}.$$

II - La fonction linéaire**Définition 3**

Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax,$$

où a est un nombre fixé, appelé le **coefficient** de la fonction.

Propriété 1

Une situation est de proportionnalité si, et seulement si, elle se modélise par une fonction linéaire. Le coefficient de la fonction est alors le coefficient de proportionnalité.

Exemple

Le prix de la masse achetée s'écrit $p : m \mapsto 2,3 m$. Une masse de 14 kg coute $p(14) = 2,3 \times 14 = 32,2$ €.

Propriété 2

Une fonction linéaire vérifie toujours $f(0) = 0$, et

$$f(k \times x) = k \times f(x)$$

pour tout nombre k : doubler l'antécédent double l'image.

Méthode 3 — Déterminer une fonction linéaire

Il suffit de connaître l'image d'un seul nombre non nul : si $f(x_0) = y_0$, alors $a = \frac{y_0}{x_0}$.

Exemple

Une fonction linéaire vérifie $f(4) = 10$. Alors $a = \frac{10}{4} = 2,5$, donc $f : x \mapsto 2,5 x$.

III - Représentation graphique**Propriété 3**

La représentation graphique d'une fonction linéaire $x \mapsto ax$ est une **droite passant par l'origine** du repère.

Réciproquement, toute droite passant par l'origine, autre que l'axe des ordonnées, représente une fonction linéaire.

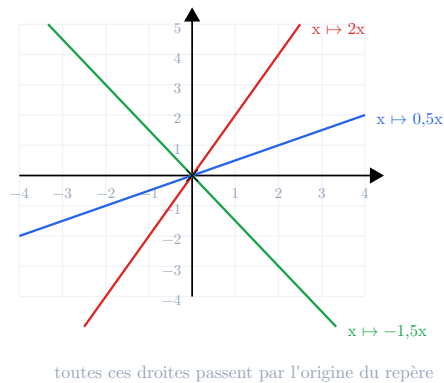
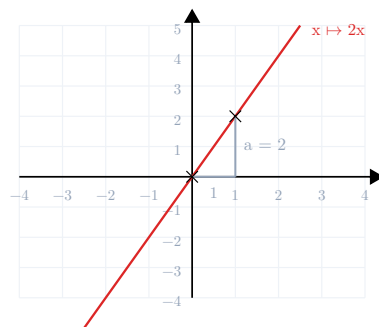


Fig. 59. – Trois fonctions linéaires : la droite est d'autant plus « penchée » que $|a|$ est grand, et elle descend quand a est négatif.

Méthode 4 — Tracer la droite

1. L'origine appartient toujours à la droite : c'est un premier point.
2. Calculer l'image d'un nombre bien choisi, par exemple 1 ou 2.
3. Placer ce second point, et tracer la droite.



en avançant de 1, on monte de a : le coefficient se lit sur la droite

Fig. 60. – Lire le coefficient : en avançant de 1, on monte de a .

Méthode 5 — Lire le coefficient sur un graphique

Partir de l'origine, avancer de 1 vers la droite, puis mesurer la montée : cette montée est le coefficient. Une descente donne un coefficient négatif.

Reconnaitre une proportionnalité sur un graphique se résume à deux conditions : les points sont alignés, et cette droite passe par l'origine. Une droite qui ne passe pas par l'origine n'est pas une situation de proportionnalité.

IV - Pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur

Définition 4

Augmenter une valeur de $t\%$, c'est la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; la diminuer de $t\%$, c'est la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$. Ce nombre est le **coefficient multiplicateur** de l'évolution.

Exemples

- +5% correspond à $\times 1,05$.
- +20% correspond à $\times 1,2$.
- -20% correspond à $\times 0,8$.
- -100% correspond à $\times 0$.

Méthode 6 — Retrouver le taux à partir du coefficient

Un coefficient c correspond à une évolution de

$$t = (c - 1) \times 100 \text{ \%},$$

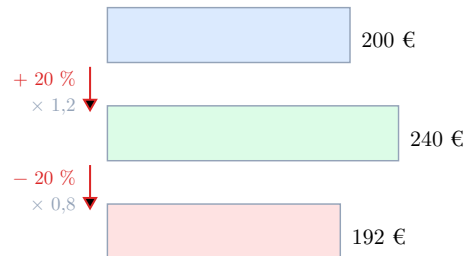
positive si $c > 1$, négative si $c < 1$.

Exemple

Une multiplication par 1,35 correspond à une hausse de 35% ; une multiplication par 0,93 à une baisse de 7%.

Propriété 4 — Évolutions successives

Enchaîner deux évolutions revient à multiplier leurs coefficients. Le taux global n'est pas la somme des taux.



une hausse de 20 % puis une baisse de 20 % ne ramènent pas à 200 €

Fig. 61. — Une hausse puis une baisse du même pourcentage : la valeur finale est inférieure à la valeur initiale.

Exemple — Hausse puis baisse**On sait que**

Un article à 200 € augmente de 20%, puis baisse de 20%.

Or

$$200 \times 1,2 \times 0,8 = 200 \times 0,96 = 192.$$

Donc

Le prix final est 192 €, soit une baisse globale de 4% — et non un retour au prix de départ.

Une hausse de 20% suivie d'une baisse de 20% ne se compense pas : la baisse porte sur une valeur plus grande que la hausse.

Exemple — Appliquer une évolution

Un loyer de 650 € augmente de 2,5 % :

$$650 \times 1,025 = 666,25 \text{ €}.$$

V - Proportionnalité en géométrie

La proportionnalité ne concerne pas que les prix : elle est au cœur de toute la géométrie des configurations.

Propriété 5

Dans une configuration de Thalès, les longueurs des deux triangles sont proportionnelles : le coefficient est le rapport $\frac{AM}{AB}$.

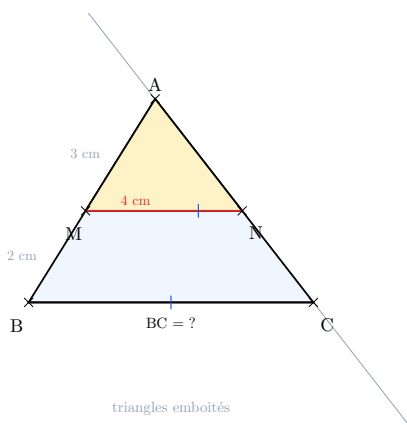


Fig. 62. – Les longueurs du petit triangle et celles du grand forment un tableau de proportionnalité.

Exemple

Avec $AM = 3$, $AB = 5$ et $MN = 4$:

	petit triangle	grand triangle
sur la première droite	3	5
segment parallèle	4	BC

Le coefficient vaut $\frac{5}{3}$, donc $BC = 4 \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$.

Propriété 6

Deux triangles semblables ont leurs longueurs proportionnelles : le rapport de similitude est un coefficient de proportionnalité.

Méthode 7 — Reconnaître une proportionnalité géométrique

Chercher, dans la figure, deux triangles de même forme : configuration de Thalès, triangles semblables, agrandissement ou réduction. Les longueurs correspondantes forment alors un tableau de proportionnalité.

Chapitre 12

Homothéties, agrandissement-réduction et effet sur les grandeurs

I - Agrandissement et réduction

Définition 1

Une figure est un **agrandissement** ou une **réduction** d'une autre lorsque toutes ses longueurs sont obtenues en multipliant celles de la première par un même nombre $k > 0$, appelé le **rapport**.

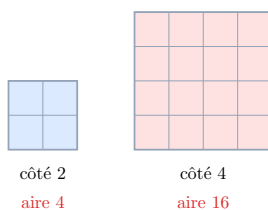
Remarque

Agrandissement quand $k > 1$, réduction quand $0 < k < 1$, figure superposable quand $k = 1$. Les angles, eux, ne changent jamais.

Propriétés — Effet sur les grandeurs

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

- les **longueurs** sont multipliées par k ;
- les **aires** sont multipliées par k^2 ;
- les **volumes** sont multipliés par k^3 .



$$\text{longueurs} \times 2, \text{aires} \times 2^2 = 4, \text{volumes} \times 2^3 = 8$$

l'aire est multipliée par le carré du rapport

Fig. 63. — En doublant le côté, l'aire est multipliée par 4 : quatre carrés de côté 2 tiennent dans un carré de côté 4.

Pour mieux comprendre

L'aire est un produit de deux longueurs, chacune multipliée par k : d'où $k \times k = k^2$. Le volume est un produit de trois longueurs : d'où k^3 .

Exemple — Une maquette

Une maquette est à l'échelle $\frac{1}{50}$ d'un bâtiment.

- Une hauteur de 12 cm sur la maquette correspond à $12 \times 50 = 600$ cm, soit 6 m.
- Une façade de 200 cm^2 sur la maquette correspond à $200 \times 50^2 = 500\,000 \text{ cm}^2$, soit 50 m^2 .
- Un volume de 1 L sur la maquette correspond à $50^3 = 125\,000$ L, soit 125 m^3 .

L'erreur la plus fréquente consiste à multiplier une aire par k au lieu de k^2 . Doubler les dimensions d'une pièce ne double pas sa surface : il la quadruple.

II - L'homothétie

Définition 2

Soit O un point et k un nombre non nul. L'**homothétie** de centre O et de rapport k associe à tout point M le point M' de la droite (OM) tel que

$$OM' = |k| \times OM,$$

M' étant du même côté que M si $k > 0$, et de l'autre côté si $k < 0$.

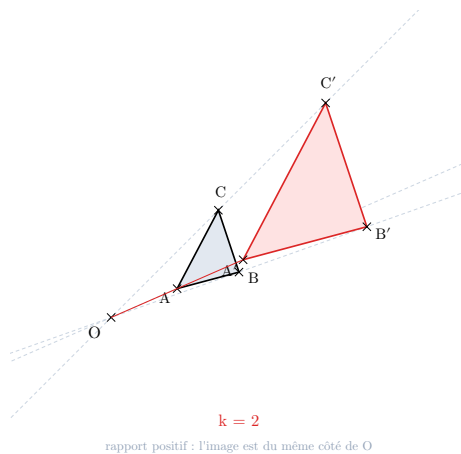


Fig. 64. – Une homothétie de rapport 2 : chaque point s'éloigne de O , deux fois plus loin, sur la même demi-droite.

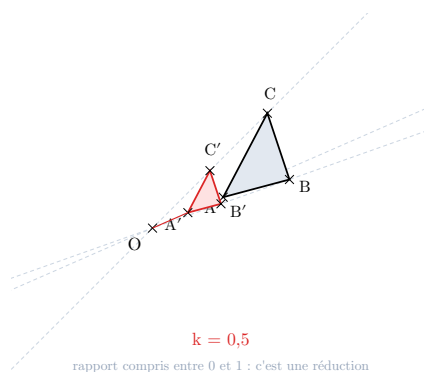


Fig. 65. – Un rapport compris entre 0 et 1 rapproche les points de O : c'est une réduction.

Méthode 1 — Construire l'image d'une figure

1. Tracer les droites reliant O à chaque sommet.
2. Reporter sur chacune la longueur multipliée par $|k|$, du bon côté de O .
3. Relier les images dans le même ordre.

III - Rapport positif, rapport négatif

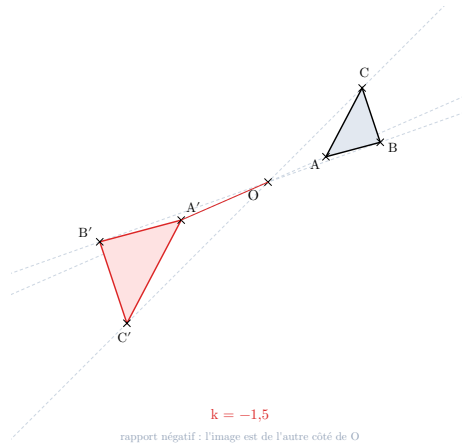


Fig. 66. – Un rapport négatif : l'image passe de l'autre côté du centre, et la figure se retrouve retournée.

Propriété 1

L'homothétie de centre O et de rapport -1 est exactement la symétrie centrale de centre O .

Remarque

Le signe du rapport ne change ni les longueurs ni les aires : $|k|$ seul intervient dans les calculs de grandeurs. Il ne change que la position de l'image.

IV - Propriétés de conservation et lien avec Thalès

Propriétés

Une homothétie de rapport k :

- multiplie les longueurs par $|k|$;
- **conserve** les mesures d'angles ;
- conserve l'alignement, le parallélisme et les milieux ;
- transforme une droite en une droite qui lui est **parallèle**.

C'est la différence essentielle avec les symétries, la translation et la rotation : celles-ci conservent les longueurs, l'homothétie les multiplie. Une homothétie déforme la taille, jamais la forme.

Propriété 2 — Lien avec le théorème de Thalès

Si M' et N' sont les images de M et N par l'homothétie de centre O et de rapport k , alors $(M'N')$ est parallèle à (MN) et

$$M'N' = |k| \times MN.$$

On retrouve exactement la configuration du théorème de Thalès, de sommet O .

Remarque

Le théorème de Thalès et l'homothétie disent donc la même chose, sous deux points de vue : l'un parle de quotients de longueurs, l'autre d'une transformation du plan.

V - Calculs dans une homothétie de rapport k

Méthode 2 — Calculer une grandeur de l'image

1. Identifier le rapport k de l'homothétie ou de l'agrandissement.
2. Multiplier par $|k|$ pour une longueur, par k^2 pour une aire, par k^3 pour un volume.

Exemple — Longueur, aire et volume

Un solide de hauteur 5 cm, d'aire latérale 60 cm² et de volume 80 cm³ subit une homothétie de rapport 3.

On sait que

Les longueurs sont multipliées par 3, les aires par 3² et les volumes par 3³.

Donc

La hauteur devient 15 cm, l'aire $60 \times 9 = 540$ cm², et le volume $80 \times 27 = 2160$ cm³.

Exemple — Retrouver le rapport

Deux figures semblables ont des aires de 18 cm² et 50 cm².

On sait que

$$k^2 = \frac{50}{18} = \frac{25}{9}.$$

Or

$$k > 0, \text{ donc } k = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

Donc

Les longueurs de la seconde valent $\frac{5}{3}$ de celles de la première.

Exemple — Une réduction

Un cône de volume 240 cm³ est réduit dans le rapport $\frac{1}{2}$. Son volume devient

$$240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{240}{8} = 30 \text{ cm}^3.$$

VI - Identifier des homothéties dans une frise, un pavage, une rosace

Méthode 3 — Reconnaître une homothétie

1. Comparer deux exemplaires du motif : sont-ils de la même taille ?
2. Tailles différentes mais même forme : il y a un agrandissement ou une réduction.
3. Relier les points correspondants : si toutes ces droites se coupent en un même point, ce point est le centre de l'homothétie.
4. Le rapport se lit sur le quotient de deux longueurs correspondantes.

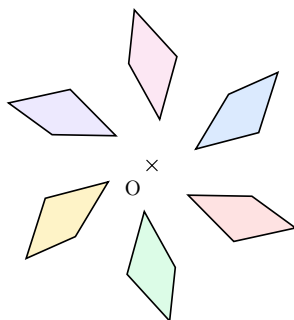
rosace : six exemplaires du motif, tournés de 60° autour de O

Fig. 67. – Dans une rosace, les motifs ont tous la même taille : la transformation en jeu est une rotation, pas une homothétie.

Exemple — Une spirale de motifs

Certaines rosaces combinent une rotation et une homothétie de même centre : le motif tourne et rétrécit à chaque étape. Le rapport se lit alors sur deux motifs consécutifs, l'angle sur leur inclinaison.

Remarque

Frises, pavages et rosaces se décrivent tous à l'aide de quatre transformations : translation, symétrie axiale, symétrie centrale et rotation — auxquelles l'homothétie ajoute le changement d'échelle.

Chapitre 13

Fonctions affines

I - Définition

Définition 1

Une **fonction affine** est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax + b,$$

où a et b sont deux nombres fixés.

Vocabulaire

a est le **coefficient directeur** de la fonction, b son **ordonnée à l'origine**.

Exemples

- $f : x \mapsto 3x - 2$ est affine, avec $a = 3$ et $b = -2$.
- $g : x \mapsto -x + 5$ est affine, avec $a = -1$ et $b = 5$.
- $h : x \mapsto 4x$ est affine, avec $b = 0$: c'est aussi une fonction linéaire.
- $k : x \mapsto 7$ est affine, avec $a = 0$: c'est une fonction constante.
- $m : x \mapsto x^2 + 1$ n'est pas affine.

Remarque

Les fonctions linéaires sont donc les fonctions affines dont l'ordonnée à l'origine est nulle. Toute fonction linéaire est affine ; la réciproque est fausse.

Propriété 1

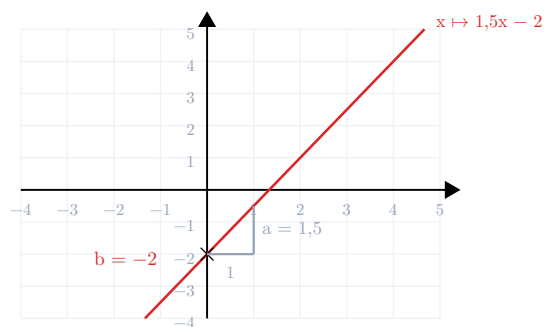
Pour toute fonction affine, $f(0) = b$: l'ordonnée à l'origine est l'image de 0.

II - Représentation graphique

Propriété 2

La représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est une **droite**. Elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; b)$.

Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation d'une fonction affine.



b se lit sur l'axe des ordonnées, a se lit sur la pente

Fig. 68. – La droite de $x \mapsto 1,5x - 2$: elle coupe l'axe des ordonnées en -2 , et monte de $1,5$ quand on avance de 1 .

Méthode 1 — Tracer la droite à partir de deux points

1. Choisir deux valeurs de x éloignées, par exemple 0 et 4 .
2. Calculer leurs images.
3. Placer les deux points obtenus.
4. Tracer la droite qui les joint, puis contrôler avec un troisième point.

Exemple

Pour $f : x \mapsto 1,5x - 2$: $f(0) = -2$ et $f(4) = 4$. On place $(0; -2)$ et $(4; 4)$, et on trace.

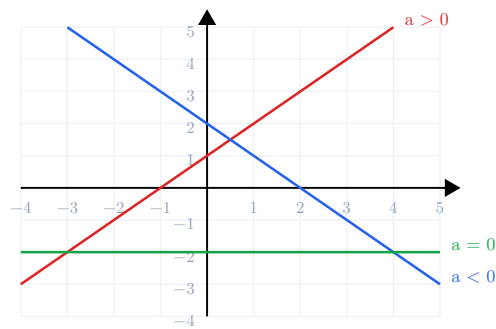
Remarque

Deux points suffisent, mais un troisième sert de vérification : s'il n'est pas aligné, c'est qu'un calcul est faux.

III - Interpréter les paramètres

Propriétés

- Le signe de a donne le sens de variation : la droite **monte** si $a > 0$, **descend** si $a < 0$, est **horizontale** si $a = 0$.
- La valeur absolue de a donne l'inclinaison : plus $|a|$ est grand, plus la droite est raide.
- b donne la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe des ordonnées.



le signe de a donne le sens de variation, b la hauteur au départ

Fig. 69. – Trois allures : coefficient directeur positif, négatif et nul.

Méthode 2 — Lire a et b sur un graphique

1. Lire b : c'est l'ordonnée du point d'intersection avec l'axe des ordonnées.
2. Partir d'un point de la droite à coordonnées entières, avancer de 1 vers la droite, et mesurer la montée : c'est a .
3. Une descente donne un a négatif.

Formule — Coefficient directeur à partir de deux points

Si la droite passe par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, avec $x_A \neq x_B$, alors

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemple

Une droite passe par $(1; 3)$ et $(5; 11)$:

$$a = \frac{11 - 3}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2.$$

Comme $f(1) = 3$, on a $2 \times 1 + b = 3$, donc $b = 1$: la fonction est $x \mapsto 2x + 1$.

IV - Image et antécédent

Méthode 3 — Déterminer une image

Remplacer x par le nombre dans l'expression $ax + b$, et calculer.

Exemple

Pour $f : x \mapsto 3x - 2$: $f(5) = 3 \times 5 - 2 = 13$ et $f(-2) = -6 - 2 = -8$.

Méthode 4 — Déterminer un antécédent

1. Écrire l'équation $ax + b = k$.
2. La résoudre : $x = \frac{k-b}{a}$, avec $a \neq 0$.

Exemple

Cherchons l'antécédent de 13 par $f : x \mapsto 3x - 2$.

On sait que

Il s'agit de résoudre $3x - 2 = 13$.

Or

$3x = 15$, donc $x = 5$.

Donc

L'antécédent de 13 par f est 5.

Propriété 3

Une fonction affine avec $a \neq 0$ associe à chaque nombre un unique antécédent : la droite coupe toute horizontale en exactement un point.

Remarque

Si $a = 0$, la fonction est constante : b a une infinité d'antécédents, et tout autre nombre n'en a aucun.

V - Résoudre des problèmes**Méthode 5 — Modéliser par une fonction affine**

Une situation se modélise par une fonction affine dès qu'elle comporte une **part fixe** et une **part proportionnelle** : b est la part fixe, a le tarif unitaire.

Exemple — Deux tarifs

Un club propose deux formules :

- formule A : 120 € d'abonnement, puis 2 € la séance ;
- formule B : 5 € la séance, sans abonnement.

On sait que

Ces tarifs se modélisent par $a : n \mapsto 2n + 120$, affine, et $b : n \mapsto 5n$, linéaire.

Or

Les deux formules coutent le même prix lorsque $2n + 120 = 5n$, soit $n = 40$.

Donc

Jusqu'à 40 séances, la formule B est la moins chère ; au-delà, c'est la formule A.

Méthode 6 — Résolution graphique

1. Tracer les deux droites dans un même repère.

2. Le point d'intersection donne la valeur pour laquelle les deux modèles coïncident.
3. Comparer les positions relatives des droites de part et d'autre de ce point.

Une lecture graphique donne une valeur approchée ; le calcul algébrique donne la valeur exacte. Les deux se complètent : le graphique montre, l'équation prouve.

Exemple — Un remplissage

Un réservoir contient déjà 30 L, et on le remplit à raison de 8 L par minute.

Le volume s'écrit $v : t \mapsto 8t + 30$, en litres, où t est la durée en minutes.

- Au bout de 7 minutes : $v(7) = 86$ L.
- Pour atteindre 150 L : $8t + 30 = 150$, donc $t = 15$ minutes.

Exemple — Une conversion

La conversion des degrés Celsius en degrés Fahrenheit est affine :

$$f : c \mapsto 1,8 c + 32.$$

Ainsi 0°C valent 32°F , et 100°C valent 212°F . Réciproquement, $1,8 c + 32 = 68$ donne $c = 20^\circ\text{C}$.

Chapitre 14

Puissances, notation scientifique et ordres de grandeur

I - Puissances d'un nombre

Définition 1

Soit a un nombre et n un entier supérieur ou égal à 1. La **puissance** a^n est le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Vocabulaire

a est la **base**, n l'**exposant**. On lit « a exposant n ». Pour $n = 2$ on dit « a au carré », pour $n = 3$ « a au cube ».

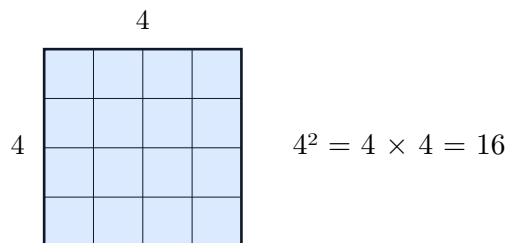


Fig. 70. – Le carré d'un nombre, vu comme l'aire d'un carré.

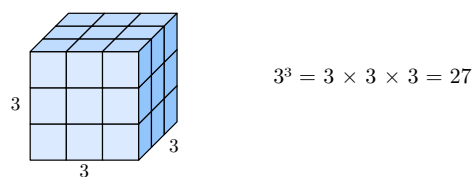


Fig. 71. – Le cube d'un nombre, vu comme le volume d'un cube.

Définitions

Pour $a \neq 0$:

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Remarque

L'exposant négatif ne rend pas le résultat négatif : $2^{-3} = \frac{1}{8}$ est positif. Un exposant négatif signale un inverse, pas un signe.

Exemples

- $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- $(-2)^3 = -8$ et $(-2)^4 = 16$
- $5^{-2} = \frac{1}{25} = 0,04$
- $7^0 = 1$ et $7^1 = 7$

Les parenthèses sont décisives : $(-3)^2 = 9$ alors que $-3^2 = -9$, car l'exposant ne porte alors que sur le 3.

Propriété 1

Le signe de a^n pour $a < 0$ dépend de la parité de n : positif si n est pair, négatif si n est impair.

II - Simplifier un produit, un quotient

Formules — Règles de calcul sur les puissances

Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$, et pour tous entiers m et n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Ces règles ne valent que pour une même base. L'expression $2^3 \times 5^3$ se simplifie en $(2 \times 5)^3 = 10^3$, mais $2^3 \times 5^4$ ne se simplifie pas.

Exemples

- $3^5 \times 3^2 = 3^7$
- $\frac{10^8}{10^3} = 10^5$
- $(2^3)^4 = 2^{12}$
- $7^{-2} \times 7^5 = 7^3$
- $\frac{10^4}{10^{-2}} = 10^6$

Méthode 1 — Simplifier une expression

1. Regrouper les puissances de même base.
2. Appliquer les règles pour n'avoir qu'un exposant par base.
3. Écrire le résultat sans exposant négatif si l'énoncé le demande.

Exemple

$$\frac{3^4 \times 3^{-6}}{3^{-3}} = 3^{4-6+3} = 3^1 = 3.$$

III - Puissances de 10 et préfixes

Propriété 2

Pour tout entier n positif :

$$10^n = 1 \underbrace{0\dots 0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{et} \quad 10^{-n} = 0, \underbrace{0\dots 0}_{n-1 \text{ zéros}} 1.$$

Exemples

- $10^6 = 1\ 000\ 000$
- $10^{-3} = 0,001$
- $10^0 = 1$

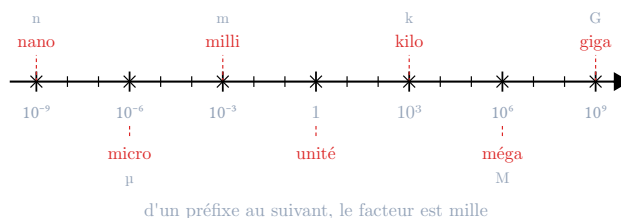


Fig. 72. – Les préfixes usuels, de nano à giga : chaque étape multiplie par mille.

Formule — Les préfixes du système international

nano	micro	milli	—	kilo	méga	giga	téra
10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^0	10^3	10^6	10^9	10^{12}

Exemples

- $1\text{ km} = 10^3\text{ m}$; $1\text{ mm} = 10^{-3}\text{ m}$.
- $1\text{ Go} = 10^9\text{ octets}$; $1\text{ }\mu\text{m} = 10^{-6}\text{ m}$.
- $1\text{ MW} = 10^6\text{ W}$.

IV - Notation scientifique

Définition 2

L'**écriture scientifique** d'un nombre décimal non nul est son écriture sous la forme

$$a \times 10^n,$$

où n est un entier relatif et où a est un décimal tel que $1 \leq |a| < 10$: il n'y a donc qu'un seul chiffre, non nul, avant la virgule.

Méthode 2 — Écrire un nombre en notation scientifique

1. Placer la virgule juste après le premier chiffre non nul.
2. Compter de combien de rangs la virgule a été déplacée.
3. Vers la gauche : exposant positif ; vers la droite : exposant négatif.

Exemples

- $47\,500 = 4,75 \times 10^4$
- $0,000\,62 = 6,2 \times 10^{-4}$
- $8,3 = 8,3 \times 10^0$
- $0,000\,000\,000\,1 = 10^{-10}$

$47,5 \times 10^3$ vaut bien $47\,500$, mais ce n'est pas l'écriture scientifique : $47,5$ est supérieur à 10.

Méthode 3 — Comparer deux nombres en notation scientifique

1. Comparer d'abord les exposants : le plus grand exposant l'emporte, pour des nombres positifs.
2. À exposants égaux, comparer les nombres a .

Exemple

$3,1 \times 10^5 < 2,4 \times 10^7$, car $5 < 7$, même si $3,1 > 2,4$.

Définition 3

L'**ordre de grandeur** d'un nombre est la puissance de 10 la plus proche de ce nombre : on arrondit a à l'unité dans son écriture scientifique.

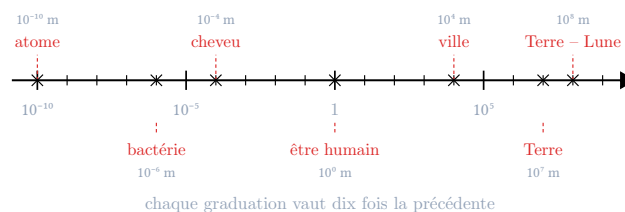


Fig. 73. — Quelques ordres de grandeur, de l'atome à la distance Terre-Lune.

Exemples

- $3\,200 = 3,2 \times 10^3$: ordre de grandeur 3×10^3 .
- $87\,000 = 8,7 \times 10^4$: ordre de grandeur 10^5 .
- La population mondiale, environ 8×10^9 personnes.

Méthode 4 — Estimer un résultat

Remplacer chaque nombre par son ordre de grandeur, puis calculer : le résultat obtenu sert à contrôler l'ordre de grandeur du calcul exact.

V - Problèmes**Exemple — En physique : la vitesse de la lumière**

La lumière parcourt 3×10^8 m en une seconde. Quelle distance parcourt-elle en une année, sachant qu'une année compte environ $3,15 \times 10^7$ secondes ?

On sait que

La distance est le produit de la vitesse par la durée.

Or

$$3 \times 10^8 \times 3,15 \times 10^7 = 9,45 \times 10^{8+7} = 9,45 \times 10^{15}.$$

Donc

Une année-lumière vaut environ $9,45 \times 10^{15}$ m, soit près de dix mille milliards de kilomètres.

Exemple — En chimie : le nombre d'Avogadro

Une mole contient 6×10^{23} entités. Combien d'atomes dans 0,05 mole ?

$$0,05 \times 6 \times 10^{23} = 0,3 \times 10^{23} = 3 \times 10^{22}.$$

Exemple — En informatique : les unités de stockage

Un disque de 2 To contient 2×10^{12} octets. Combien de fichiers de 4 Mo peut-il stocker ?

$$\frac{2 \times 10^{12}}{4 \times 10^6} = 0,5 \times 10^6 = 5 \times 10^5,$$

soit 500 000 fichiers.

Exemple — En sciences de la vie : une échelle

Une bactérie mesure environ 2 μm , soit 2×10^{-6} m, et un cheveu 10^{-4} m de diamètre.

$$\frac{10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} = 0,5 \times 10^2 = 50 :$$

le diamètre d'un cheveu vaut environ cinquante bactéries mises bout à bout.

Méthode 5 — Contrôler la cohérence d'un résultat

Un calcul avec des puissances se vérifie en deux temps : le chiffre a doit rester entre 1 et 10, et l'exposant doit s'obtenir par une addition ou une soustraction d'exposants — jamais par un produit.

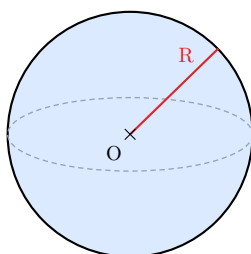
Chapitre 15

Grandeurs composées, volumes et conversions d'unités

I - Volume de la boule et formules du cycle

Définitions

Une **sphère** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de O : c'est une surface. La **boule** est le solide plein qu'elle délimite.



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

la sphère est la surface, la boule est le solide plein

aire de la sphère : $4 \pi R^2$

Fig. 74. – La boule de centre O et de rayon R .

Formules — Sphère et boule

$$V_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\text{sphère}} = 4 \pi R^2.$$

Formules — Les volumes du cycle

Solide	Volume
Cube d'arête a	a^3
Pavé droit	$L \times l \times h$
Prisme droit	$\mathcal{A}_{\text{base}} \times h$
Cylindre de révolution	$\pi R^2 h$
Pyramide	$\frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$
Cône de révolution	$\frac{1}{3} \pi R^2 h$
Boule	$\frac{4}{3} \pi R^3$

Remarque

Les trois familles se retiennent ensemble : les solides « droits » ont un volume « base $\times$ hauteur », les solides « pointus » en ont le tiers, et la boule fait bande à part.

Exemple

Une boule de rayon 6 cm a pour volume

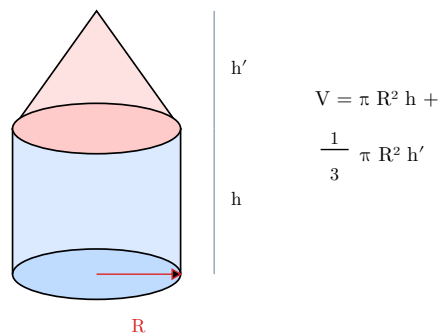
$$V = \frac{4}{3} \pi \times 6^3 = \frac{4}{3} \pi \times 216 = 288\pi \approx 905 \text{ cm}^3.$$

La valeur exacte s'écrit avec π ; la valeur approchée s'obtient à la calculatrice, en précisant l'arrondi. Les deux réponses sont acceptables, mais elles ne s'écrivent pas de la même façon.

II - Volumes d'assemblages

Méthode 1 — Calculer le volume d'un solide composé

1. Décomposer le solide en solides usuels.
2. Repérer les dimensions de chacun, en vérifiant qu'elles sont dans la même unité.
3. Calculer chaque volume séparément.
4. Additionner — ou soustraire, si un solide est creusé dans un autre.



le volume d'un assemblage est la somme des volumes

Fig. 75. — Un cylindre surmonté d'un cône : le volume total est la somme des deux.

Exemple — Un silo

Un silo est formé d'un cylindre de rayon 2 m et de hauteur 5 m, surmonté d'un cône de même rayon et de hauteur 3 m.

On sait que

Le volume total est la somme des deux volumes.

Or

$$V_{\text{cylindre}} = \pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi \text{ et } V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 3 = 4\pi.$$

Donc

$$V = 24\pi \approx 75 \text{ m}^3, \text{ soit environ } 75 \text{ 000 litres.}$$

Exemple — Un solide creusé

Dans un cube d'arête 10 cm, on perce un cylindre de rayon 2 cm traversant le cube de part en part.

$$V = 10^3 - \pi \times 2^2 \times 10 = 1\,000 - 40\pi \approx 874 \text{ cm}^3.$$

III - Grandeurs produits et grandeurs quotients

Définition 1

Une **grandeur composée** s'obtient en multipliant ou en divisant deux grandeurs. Son unité se construit de la même façon.

Exemples — Des grandeurs quotients

- Une **vitesse** est une distance divisée par une durée : km/h, m/s.
- Un **débit** est un volume divisé par une durée : L/min, m³/s.
- Une **masse volumique** est une masse divisée par un volume : kg/m³, g/cm³.
- Une **concentration** est une masse divisée par un volume : g/L.

Exemples — Des grandeurs produits

- Une **énergie** est une puissance multipliée par une durée : le kilowattheure, kW · h.
- Une **aire** est un produit de deux longueurs : le mètre carré.

Formules

$$v = \frac{d}{t}, \quad d = v \times t, \quad t = \frac{d}{v}.$$

Méthode 2 — Utiliser une grandeur composée

1. Écrire la formule qui la définit.
2. Vérifier que les unités des données correspondent à celle de la grandeur.
3. Convertir si nécessaire **avant** de calculer.
4. Donner le résultat avec son unité.

Exemple — Une vitesse moyenne

Un cycliste parcourt 63 km en 2 h 30 min.

On sait que

$$2 \text{ h } 30 \text{ min} = 2,5 \text{ h}.$$

Or

$$v = \frac{63}{2,5}.$$

Donc

$$v = 25,2 \text{ km/h}.$$

2 h 30 min ne vaut pas 2,3 h : les durées ne sont pas décimales. Il faut convertir en heures décimales avant tout calcul.

Exemple — Une masse volumique

Un bloc de 2,7 kg occupe 1 dm³.

$$\rho = \frac{2,7}{1} = 2,7 \text{ kg/dm}^3 = 2,7 \text{ g/cm}^3 :$$

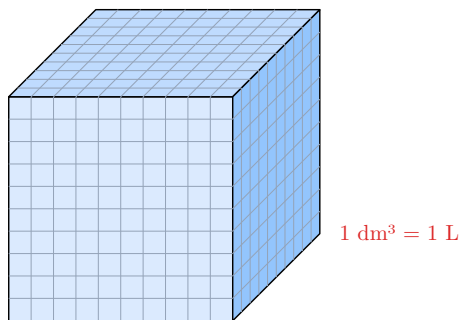
c'est de l'aluminium.

IV - Conversions d'unités de volume

Propriété 1

Un rapport k sur les longueurs donne un rapport k^2 sur les aires et k^3 sur les volumes. Pour les unités décimales, k vaut 10 :

$$1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm} \quad \text{donc} \quad 1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3.$$



$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} \quad \text{donc} \quad 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$$

un rapport 10 sur les longueurs donne un rapport 1 000 sur les volumes

Fig. 76. – Le cube d'arête 1 dm contient dix rangées de dix piles de dix cubes d'arête 1 cm.

Formules — Les équivalences à connaître

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}, \quad 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}, \quad 1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}.$$

Exemples

- $2,5 \text{ m}^3 = 2,5 \times 10^6 \text{ cm}^3 = 2\,500\,000 \text{ cm}^3$.
- $450 \text{ cm}^3 = 0,45 \text{ L}$.
- $0,02 \text{ m}^3 = 20 \text{ dm}^3 = 20 \text{ L}$.

Méthode 3 — Convertir un volume

1. Écrire le rapport entre les deux unités de longueur, comme puissance de 10.
2. L'élever au cube.
3. Multiplier ou diviser par ce facteur.

Remarque

Le tableau de conversion des volumes comporte **trois** colonnes par unité, contre deux pour les aires et une pour les longueurs. C'est la traduction, en colonnes, des exposants 1, 2 et 3.

V - Conversions sur les grandeurs composées

Méthode 4 — Convertir une grandeur composée

Convertir séparément le numérateur et le dénominateur, puis effectuer le quotient.

Exemple — Des km/h aux m/s

On sait que

1 km = 1 000 m et 1 h = 3 600 s.

Or

$$90 \text{ km/h} = \frac{90 \times 1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}}.$$

Donc

90 km/h = 25 m/s. Le facteur de conversion est 3,6 : on divise par 3,6 pour passer des km/h aux m/s.

Exemple — Des m³/s aux L/min

On sait que

1 m³ = 1 000 L et 1 min = 60 s.

Or

0,05 m³/s = 0,05 × 1 000 L/s = 50 L/s.

Donc

50 × 60 = 3 000 L/min.

Exemple — Un débit et une durée

Une piscine de 48 m³ se remplit à 200 L/min. Combien de temps ?

On sait que

48 m³ = 48 000 L.

Or

$t = 48 \frac{000}{200} = 240 \text{ min}.$

Donc

Le remplissage dure 4 heures.

Méthode 5 — Vérifier la cohérence des unités

Le contrôle final porte toujours sur l'unité : une longueur ne peut pas répondre à une question sur un volume, et un résultat en m/s de l'ordre de plusieurs centaines pour un piéton signale une erreur de conversion.

Une réponse sans unité est incomplète ; une réponse avec une unité incohérente est fausse, même si le calcul est juste.

Chapitre 16

Espace : solides, sections planes et repérage sur la sphère

I - Représenter les solides du cycle

Vocabulaire

Un **polyèdre** est un solide dont toutes les faces sont des polygones. Le cube, le pavé droit, le prisme droit et la pyramide en sont ; le cylindre, le cône et la boule n'en sont pas.

Définition 1

La **perspective cavalière** représente un solide en conservant en vraie grandeur les faces parallèles au plan de la feuille. Les arêtes fuyantes sont tracées parallèlement entre elles, réduites, et les arêtes cachées sont en pointillés.

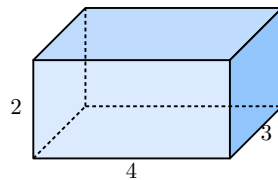


Fig. 77. – Un pavé droit en perspective cavalière.

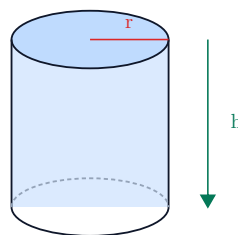


Fig. 78. – Un cylindre de révolution : les disques de base se dessinent en ellipses.

Définition 2

Un **patron** d'un solide est une figure plane qui, pliée le long de certains segments, reconstitue exactement le solide.

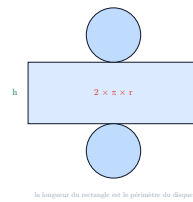


Fig. 79. – Le patron d'un cylindre : deux disques et un rectangle dont la longueur est le périmètre du disque.

Définitions

Un solide se décrit aussi par ses **vues** :

- la vue de **face**, celle de l'observateur ;
- la vue de **dessus**, à la verticale ;
- la vue de **côté** ;
- la vue **en coupe**, qui montre l'intérieur.

Méthode 1 — Passer d'une représentation à une autre

1. Compter les faces, les arêtes et les sommets sur chaque représentation : les nombres doivent coïncider.
2. Repérer les longueurs conservées : elles sont en vraie grandeur sur le patron et sur les vues, pas toujours en perspective.
3. Contrôler la cohérence : deux vues suffisent rarement à identifier un solide, trois suffisent presque toujours.

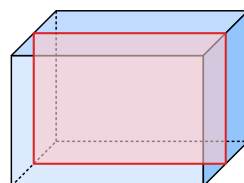
II - Sections planes

Définition 3

La **section** d'un solide par un plan est la figure obtenue à l'intersection du solide et du plan : c'est ce qu'on voit sur la tranche quand on coupe le solide.

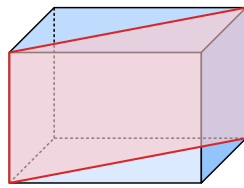
Propriétés — Section d'un pavé droit

- Par un plan **parallèle à une face**, la section est un rectangle identique à cette face.
- Par un plan **parallèle à une arête**, la section est un rectangle dont une dimension est celle de l'arête.



plan parallèle à une face : la section est ce rectangle

Fig. 80. – Une section parallèle à une face : le rectangle obtenu est superposable à cette face.

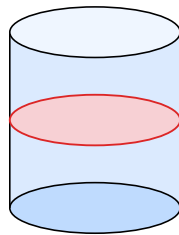


plan parallèle à une arête : la section est un rectangle

Fig. 81. – Une section parallèle à une arête verticale.

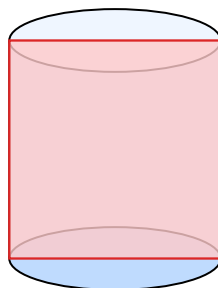
Propriétés — Sections des solides de révolution

- **Cylindre** coupé parallèlement aux bases : un disque de même rayon ; coupé par un plan contenant l'axe : un rectangle.
- **Cône** coupé parallèlement à la base : un disque plus petit, dont le rayon est proportionnel à la distance au sommet.
- **Pyramide** coupée parallèlement à la base : un polygone de même forme, réduction de la base.
- **Sphère** coupée par un plan : un cercle, d'autant plus petit que le plan s'éloigne du centre.



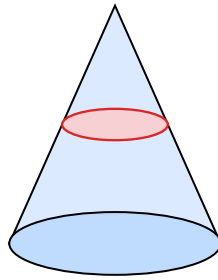
cylindre coupé par un plan parallèle aux bases : un disque de même rayon

Fig. 82. – Le cylindre coupé parallèlement aux bases.



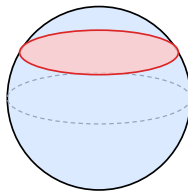
cylindre coupé par un plan contenant l'axe : un rectangle

Fig. 83. – Le même cylindre, coupé par un plan contenant son axe.



cône coupé parallèlement à la base : un disque plus petit

Fig. 84. – Le cône coupé parallèlement à sa base : la section est une réduction du disque de base.



sphère coupée par un plan : un cercle, plus petit si le plan s'éloigne du centre

Fig. 85. – La sphère coupée par un plan.

La section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base est une réduction de cette base : c'est le chapitre des homothéties qui donne le rapport, et donc l'effet sur les aires et les volumes.

III - Utiliser un logiciel de géométrie dans l'espace

Protocole

1. Construire le solide à partir de ses dimensions.
2. Le faire tourner pour identifier les arêtes cachées et vérifier la perspective dessinée à la main.
3. Définir un plan, puis demander la section : le logiciel affiche la figure obtenue.
4. Déplacer le plan et observer comment la section se déforme.

Remarque

Le logiciel sert à **conjecturer** : il montre que la section d'un cône se réduit à mesure que le plan monte. Il ne démontre rien ; c'est le théorème de Thalès qui donne le rapport.

IV - Repérage sur la sphère

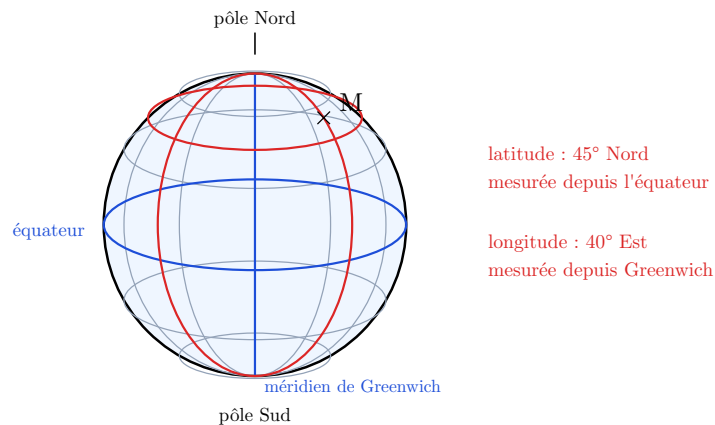
Définitions

Sur une sphère :

- un **grand cercle** est un cercle de même centre et de même rayon que la sphère ;
- les **méridiens** sont des demi-grands cercles joignant les deux pôles ;

- les **parallèles** sont les cercles obtenus en coupant la sphère par un plan perpendiculaire à l'axe des pôles.

L'équateur est le seul parallèle qui soit un grand cercle. Tous les méridiens en sont.



les grands cercles ont pour centre celui de la sphère : l'équateur et tous les méridiens

Fig. 86. — Un point de la sphère est repéré par sa latitude et sa longitude.

Définitions

- La **latitude** d'un point est l'angle, compris entre 0° et 90° , mesuré depuis l'équateur, suivi de Nord ou Sud.
- La **longitude** est l'angle, compris entre 0° et 180° , mesuré depuis le méridien de Greenwich, suivi de Est ou Ouest.

Exemples

- Paris : 49° Nord, 2° Est.
- Quito : 0° , 78° Ouest — sur l'équateur.
- Le pôle Nord : 90° Nord ; sa longitude n'a pas de sens.

Méthode 2 — Lire des coordonnées géographiques

- Repérer le parallèle du point : il donne la latitude, Nord au-dessus de l'équateur, Sud en dessous.
- Repérer son méridien : il donne la longitude, Est à droite de Greenwich, Ouest à gauche.
- Toujours donner les deux, avec leur lettre.

V - Calculs dans une section

Méthode 3 — Calculer une longueur dans une section

- Dessiner la section en vraie grandeur, à plat.
- Y repérer un triangle rectangle.
- Appliquer le théorème de Pythagore, ou celui de Thalès si la section provient d'une réduction.

Exemple — Le rayon d'une section de sphère

Une sphère de rayon 10 cm est coupée par un plan situé à 6 cm de son centre.

On sait que

Le rayon de la sphère, la distance au plan et le rayon de la section forment un triangle rectangle.

Or

$$r^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64.$$

Donc

$r = 8$ cm : la section est un cercle de rayon 8 cm, d'aire $64\pi \approx 201$ cm².

Exemple — Une section de cône

Un cône a une base de rayon 9 cm et une hauteur de 12 cm. On le coupe à 4 cm du sommet, parallèlement à la base.

On sait que

La section est une réduction de la base, de rapport $k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Or

Le rayon de la section vaut $9 \times \frac{1}{3} = 3$ cm.

Donc

Son aire vaut 9π cm², soit $\frac{1}{9}$ de l'aire de la base — le carré du rapport.

Exemple — La diagonale d'une section de pavé

Un pavé droit a pour dimensions 6 cm, 8 cm et 5 cm. La section par un plan parallèle à la face 6×8 est un rectangle de 6 cm sur 8 cm.

Sa diagonale mesure $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm, et son aire 48 cm².

Méthode 4 — Contrôler un résultat

Le rayon d'une section est toujours inférieur au rayon du solide, et l'aire d'une section de cône est toujours inférieure à celle de la base. Un résultat qui viole ces bornes signale une erreur.