

Enchainements d'opérations

I - Nommer un calcul

Définitions

- Le résultat d'une addition est une **somme** ; les nombres qu'on additionne sont les **termes** de la somme.
- Le résultat d'une soustraction est une **différence** ; les nombres qu'on soustrait sont aussi ses **termes**.
- Le résultat d'une multiplication est un **produit** ; les nombres qu'on multiplie sont les **facteurs** du produit.
- Le résultat d'une division est un **quotient**.

Méthode 1 — Nommer une expression

Une expression porte le nom de la **dernière** opération qu'on y effectue : c'est elle qui donne sa nature au résultat.

Exemples

- $3 + 4 \times 5$ est une **somme** : on multiplie d'abord, mais on termine par l'addition. Ses termes sont 3 et 4×5 .
- $(3 + 4) \times 5$ est un **produit** : ses facteurs sont $(3 + 4)$ et 5.
- $(7 - 2) \div 5$ est un **quotient**.

Remarque

Deux calculs peuvent avoir le même résultat sans porter le même nom : $(3 + 4) \times 5 = 35$ et $30 + 5 = 35$, mais le premier est un produit et le second une somme.

II - Priorités opératoires et parenthèses

Propriété 1 — Priorités des opérations

Dans un calcul contenant plusieurs opérations de natures différentes :

1. on effectue d'abord les calculs entre **parenthèses** ;
2. puis les **multiplications** et les **divisions**, de gauche à droite ;
3. enfin les **additions** et les **soustractions**, de gauche à droite.

Remarque

Un trait de fraction joue le rôle de parenthèses : on calcule d'abord le numérateur, puis le dénominateur, et on effectue la division en dernier.

$$\begin{aligned}
& 3 + 4 \times (2 + \boxed{3 \times 7}) \\
&= 3 + 4 \times \boxed{(2 + 21)} \\
&= 3 + \boxed{4 \times 23} \\
&= \boxed{3 + 92} \\
&= \boxed{95}
\end{aligned}$$

Fig. 1. – À chaque ligne, le calcul encadré est celui qui est prioritaire : il est le seul à changer d'une ligne à la suivante.

$$\frac{2 + 3 \times 6}{10 \div 5} = \frac{20}{10 \div 5} = \frac{20}{2} = 10$$

Fig. 2. – Avec un trait de fraction, le numérateur et le dénominateur se calculent chacun de leur côté avant la division finale.

Exemple

$$12 - 2 \times 3 = 12 - 6 = 6 \quad \text{et} \quad (12 - 2) \times 3 = 10 \times 3 = 30.$$

Les parenthèses ne sont pas un ornement : elles changent le résultat.

Méthode 2 — Contrôler la vraisemblance d'un résultat

Avant ou après un calcul, on le refait en remplaçant chaque nombre par un nombre voisin plus simple : l'ordre de grandeur obtenu doit être proche du résultat exact.

Exemples

- $2 \times \pi \times 5,9$: on approche par $2 \times 3 \times 6 = 36$, donc $2 \times \pi \times 5,9 \approx 36$.
- $0,5 \times 52,1 \times 31$: on approche par $0,5 \times 50 \times 30 = 750$.

III - Programmes de calcul et expressions

Définition 1

Un **programme de calcul** est une suite d'instructions à exécuter dans l'ordre, à partir d'un nombre choisi au départ.

Exemple

« Choisir un nombre ; lui ajouter 4 ; multiplier le résultat par 3 ; enlever 2 ». En partant de 5 : $5 + 4 = 9$, puis $9 \times 3 = 27$, puis $27 - 2 = 25$.

Méthode 3 — Traduire un programme en une seule expression

On écrit les opérations dans l'ordre du programme, en mettant entre parenthèses tout résultat intermédiaire sur lequel porte l'opération suivante.

Exemple

Le programme précédent, appliqué au nombre 5, s'écrit d'un seul trait :

$$(5 + 4) \times 3 - 2 = 9 \times 3 - 2 = 27 - 2 = 25.$$

Sans les parenthèses, $5 + 4 \times 3 - 2$ vaudrait 15 : ce ne serait plus le même programme.

Remarque

Une succession d'opérations donnée en français (« la somme de 7 et de 3, multipliée par 4 ») se traduit de la même façon : $(7 + 3) \times 4$.

IV - Distributivité sur des exemples numériques

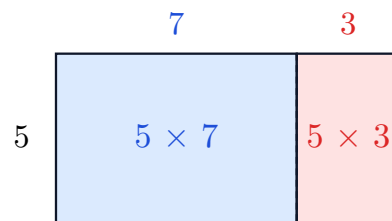
Propriété 2 — Distributivité

Multiplier une somme, c'est multiplier chacun de ses termes :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \quad \text{et} \quad k \times (a - b) = k \times a - k \times b.$$

Pour mieux comprendre

Un rectangle de hauteur k et de largeur $a + b$ se coupe en deux rectangles de largeurs a et b : son aire, $k \times (a + b)$, est la somme des deux aires $k \times a$ et $k \times b$.



$$5 \times (7 + 3) = 5 \times 7 + 5 \times 3 = 50$$

Fig. 3. – L'aire du grand rectangle se lit de deux façons : d'un bloc, $5 \times (7 + 3)$, ou en deux morceaux, $5 \times 7 + 5 \times 3$.

Exemples

- $4 \times 102 = 4 \times (100 + 2) = 400 + 8 = 408.$
- $7 \times 99 = 7 \times (100 - 1) = 700 - 7 = 693.$
- $25 \times 12 + 25 \times 8 = 25 \times (12 + 8) = 25 \times 20 = 500.$

Remarque

Lue de gauche à droite, la propriété sert à **développer** ; lue de droite à gauche, elle sert à **factoriser**, c'est-à-dire à faire apparaître un facteur commun.

V - Multiples, diviseurs et division par un décimal

Définition 2

Pour deux nombres entiers a et b , dire que a est **divisible** par b , c'est dire que a est dans la table de multiplication de b : il existe un entier k tel que $a = b \times k$.

Notation

Quatre façons de dire la même chose, à propos de $42 = 6 \times 7$:

- 42 est divisible par 6 ;
- 42 est un **multiple** de 6 ;
- 6 **divise** 42 ;
- 6 est un **diviseur** de 42.

Méthode 4 — Reconnaître un multiple

Pour savoir si un nombre est divisible par un autre, on peut :

- poser la division euclidienne et vérifier que le reste est nul ;
- ou utiliser un critère de divisibilité, quand il en existe un.

Propriété 3 — Critères par 3 et par 9

Divisible par	Critère	Exemples
3	la somme des chiffres est divisible par 3	$102 \rightarrow 1 + 0 + 2 = 3$ $113 \rightarrow 1 + 1 + 3 = 5$
9	la somme des chiffres est divisible par 9	$108 \rightarrow 1 + 0 + 8 = 9$ $113 \rightarrow 1 + 1 + 3 = 5$

Remarque

Un nombre divisible par 9 est toujours divisible par 3, puisque $9 = 3 \times 3$. La réciproque est fausse : 6 est divisible par 3 mais pas par 9.

Méthode 5 — Diviser par un nombre décimal

Un quotient ne change pas si on multiplie le dividende **et** le diviseur par un même nombre. On multiplie donc les deux par 10, 100... jusqu'à ce que le diviseur devienne un entier, puis on pose la division.

$$\begin{array}{r}
 7,2 \quad \div \quad 0,4 \\
 \downarrow \times 10 \quad \downarrow \times 10 \\
 72 \quad \div \quad 4 \\
 \\
 \begin{array}{r}
 7 \ 2 \ 4 \\
 - \ 4 \\
 \hline
 3 \ 2 \\
 - \ 3 \ 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Fig. 4. – $7,2 \div 0,4$: en multipliant les deux nombres par 10, la division devient $72 \div 4$, qui se pose.

Exemples

- $7,2 \div 0,4 = 72 \div 4 = 18$.
- $5,25 \div 0,25 = 525 \div 25 = 21$.
- $12 \div 0,5 = 120 \div 5 = 24$: diviser par 0,5, c'est multiplier par 2.