

# Triangles

## I - Somme des angles d'un triangle

### Propriété 1

Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à  $180^\circ$ .

### Démonstration

Soit un triangle  $ABC$ . On trace la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A$ .

#### On sait que

Cette parallèle et la droite  $(AB)$  sont coupées par la sécante  $(AC)$  : l'angle  $\widehat{ABC}$  et l'angle qu'il forme en  $A$ , du côté gauche, sont alternes-internes.

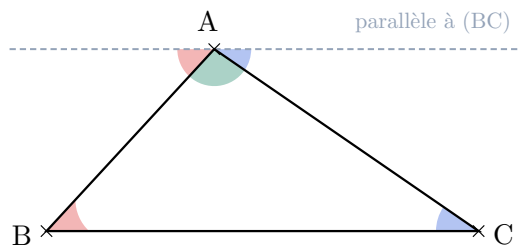
#### Or

Deux angles alternes-internes déterminés par deux droites parallèles ont la même mesure.

#### Donc

L'angle de gauche en  $A$  a pour mesure  $\widehat{ABC}$ . Le même raisonnement avec  $(AC)$  montre que l'angle de droite en  $A$  a pour mesure  $\widehat{ACB}$ .

Les trois angles se retrouvent alors mis bout à bout en  $A$ , le long d'une droite : leur somme est celle d'un angle plat, soit  $180^\circ$ .



les trois angles mis bout à bout en  $A$  forment un angle plat :  $180^\circ$

Fig. 1. – Les angles de même couleur sont alternes-internes, donc de même mesure.

### Méthode 1 — Calculer la mesure d'un angle

Quand deux angles d'un triangle sont connus, le troisième s'obtient en soustrayant leur somme à  $180^\circ$ .

### Exemples

- Dans  $ABC$ , si  $\widehat{ABC} = 60^\circ$  et  $\widehat{ACB} = 40^\circ$ , alors  $\widehat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$ .
- Dans  $DEF$ , si  $\widehat{DEF} = 90^\circ$  et  $\widehat{DFE} = 30^\circ$ , alors  $\widehat{EDF} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

### Propriété 2 — Conséquences

- Dans un **triangle rectangle**, les deux angles aigus sont complémentaires : leur somme vaut  $90^\circ$ .
- Dans un **triangle isocèle**, les deux angles de la base sont égaux ; connaître l'angle au sommet suffit donc à tout connaître.
- Dans un **triangle équilatéral**, les trois angles sont égaux, et valent chacun  $180^\circ \div 3 = 60^\circ$ .

### Exemple

Un triangle isocèle a un angle au sommet de  $40^\circ$ . Les deux angles de la base se partagent  $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ , et sont égaux : chacun mesure  $140^\circ \div 2 = 70^\circ$ .

### Remarque

Un triangle ne peut pas avoir deux angles droits, ni deux angles obtus : la somme dépasserait déjà  $180^\circ$ .

## II - Construire un triangle à partir de données partielles

### Propriété 3 — Inégalité triangulaire

Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres. Trois longueurs données ne définissent donc un triangle que si la plus grande est inférieure à la somme des deux autres.

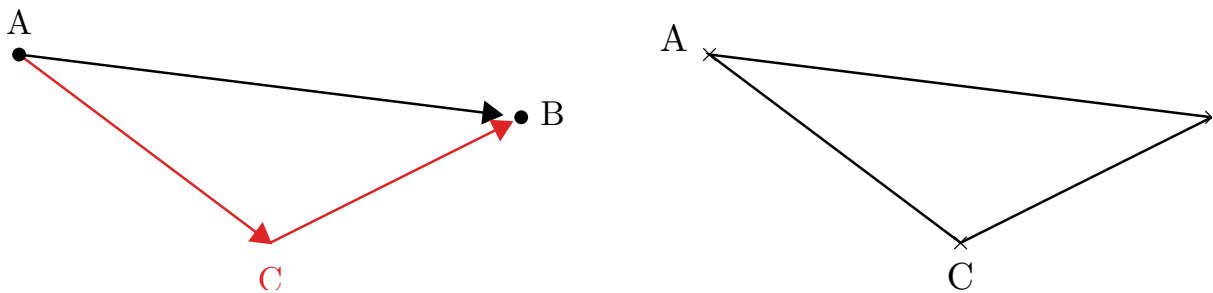


Fig. 2. – Le chemin direct est toujours plus court que le détour par le troisième sommet.

### Protocole — Trois longueurs

1. Tracer le côté le plus long.
2. Tracer un arc de cercle de centre l'une des extrémités, de rayon la deuxième longueur.
3. Tracer un arc de cercle de centre l'autre extrémité, de rayon la troisième longueur.
4. Relier le point d'intersection des deux arcs aux deux extrémités.

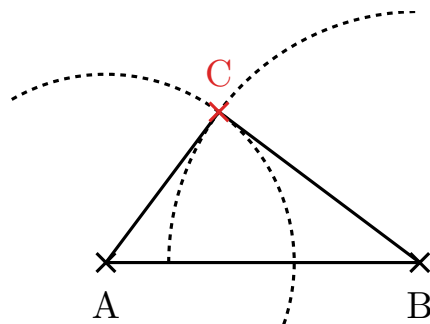


Fig. 3. – Le troisième sommet n'est pas choisi : il est imposé par le croisement des deux arcs.

#### Protocole — Deux longueurs et l'angle entre elles

1. Tracer l'un des deux côtés.
2. Au rapporteur, tracer une demi-droite formant l'angle donné.
3. Reporter la seconde longueur sur cette demi-droite : le troisième sommet y est.

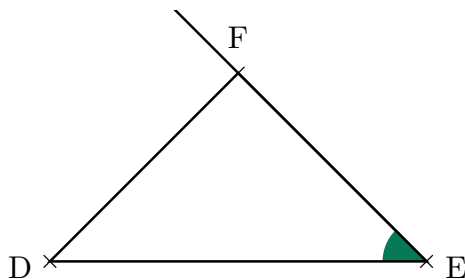


Fig. 4. – L'angle donne la direction ; la longueur donne le point.

#### Protocole — Une longueur et deux angles

1. Tracer le côté donné.
2. À chaque extrémité, tracer au rapporteur la demi-droite formant l'angle demandé.
3. Le troisième sommet est le point d'intersection des deux demi-droites.

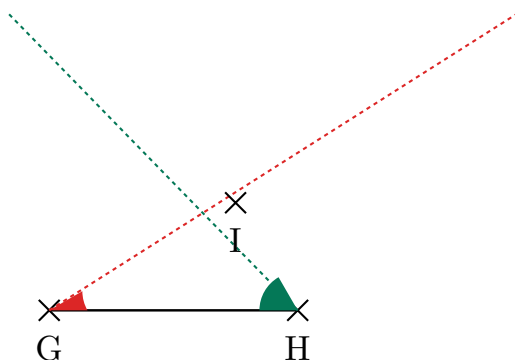


Fig. 5. – Les deux demi-droites se coupent en un seul point : le triangle est déterminé.

#### Méthode 2 — Quand une donnée manque

Les données sont parfois incomplètes en apparence : la somme des angles, le codage d'un triangle isocèle ou équilatéral, l'inégalité triangulaire permettent souvent de retrouver la donnée manquante avant de construire.

**Exemple**

Construire  $RST$  tel que  $RS = 5$  cm,  $\widehat{RST} = 50^\circ$  et  $\widehat{STR} = 70^\circ$ . L'angle en  $R$  n'est pas donné, mais

$$\widehat{SRT} = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ,$$

et on est ramené au cas « une longueur et deux angles ».

**Remarque**

Certaines données ne définissent **aucun** triangle (2 cm, 3 cm, 7 cm :  $7 > 2 + 3$ ), d'autres en définissent une infinité (trois angles seuls, sans aucune longueur).

### III - Médiatrices et cercle circonscrit

**Définition 1**

La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu. C'est l'ensemble des points situés à égale distance des deux extrémités.

**Propriété 4**

Les trois médiatrices d'un triangle sont **concurrentes** : elles se coupent en un même point, qui est le centre du **cercle circonscrit** au triangle, c'est-à-dire du cercle passant par les trois sommets.

**Démonstration**

Soit  $O$  le point d'intersection des médiatrices de  $[AB]$  et de  $[BC]$ .

**On sait que**

$O$  est sur la médiatrice de  $[AB]$ , donc  $OA = OB$ .

**Or**

$O$  est aussi sur la médiatrice de  $[BC]$ , donc  $OB = OC$ .

**Donc**

$OA = OB = OC$  : le point  $O$  est à égale distance de  $A$  et de  $C$ , il appartient donc aussi à la médiatrice de  $[AC]$ . Le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$  passe par les trois sommets.

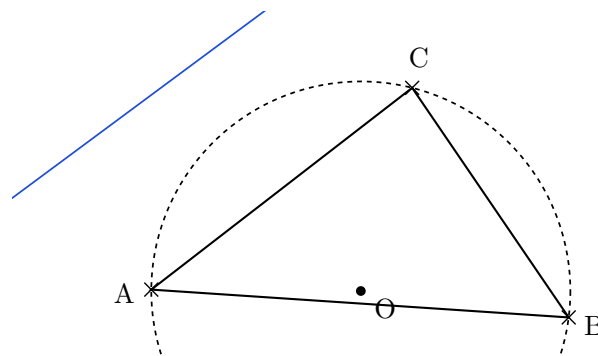
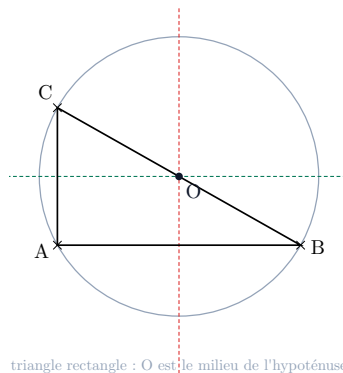
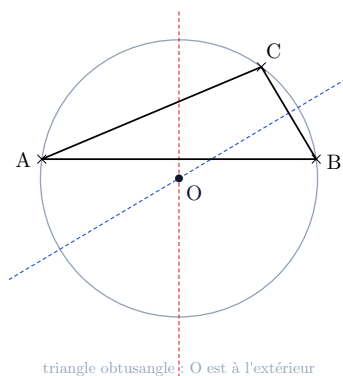


Fig. 6. – Les trois médiatrices se coupent en  $O$ , centre du cercle circonscrit.

**Propriété 5 — Cas particuliers**

- Dans un triangle **rectangle**, le centre du cercle circonscrit est le **milieu de l'hypoténuse** : l'hypoténuse est un diamètre.
- Dans un triangle **isocèle**, le centre est sur l'axe de symétrie, c'est-à-dire sur la médiatrice de la base.
- Dans un triangle **obtusangle**, le centre est à l'**extérieur** du triangle.

Fig. 7. – Triangle rectangle :  $O$  est le milieu de l'hypoténuse.Fig. 8. – Triangle obtusangle :  $O$  sort du triangle, mais le cercle passe toujours par les trois sommets.**IV - Hauteurs et aire d'un triangle****Définition 2**

La **hauteur** issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé. Le point où elle rencontre ce côté s'appelle le **pied** de la hauteur.

**Notation**

Si  $H$  est le pied de la hauteur issue de  $A$ , on dit indifféremment que  $(AH)$  est la hauteur issue de  $A$ , la hauteur relative à  $[BC]$ , ou la hauteur du côté  $[BC]$ .

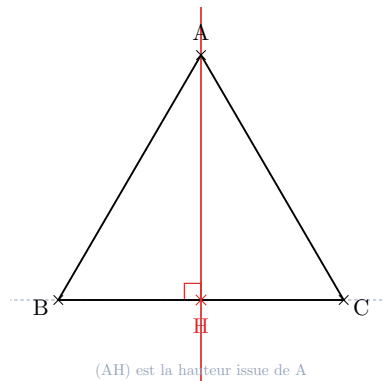


Fig. 9. – La hauteur issue de  $A$  rencontre  $(BC)$  à angle droit, en  $H$ .

### Propriété 6

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : leur point commun s'appelle l'**orthocentre**.

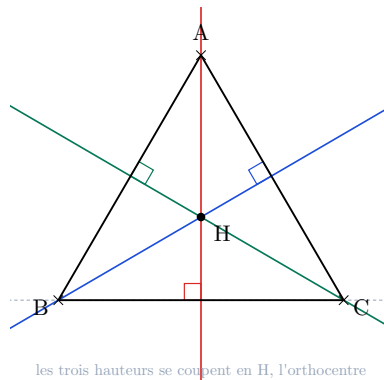


Fig. 10. – Les trois hauteurs se coupent en  $H$ .

### Remarque

Dans un triangle obtusangle, le pied d'une hauteur peut tomber en dehors du côté — il faut alors prolonger ce côté — et l'orthocentre sort du triangle.

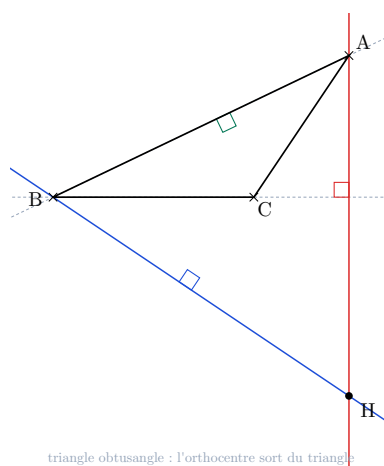


Fig. 11. – Triangle obtusangle : les hauteurs se coupent toujours, mais à l'extérieur.

### Formule

$$\text{aire d'un triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

où la hauteur est celle qui est relative à la base choisie.

### Pour mieux comprendre

Un triangle est la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur : la hauteur partage ce rectangle en deux, et chaque part est coupée en deux parts égales par un côté du triangle.

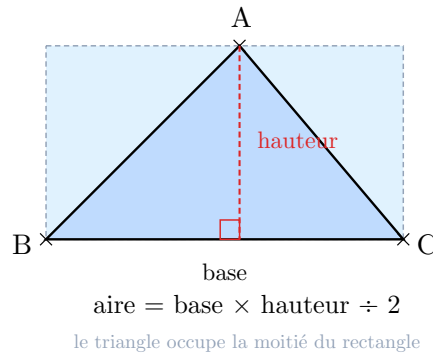


Fig. 12. – L'aire du triangle est la moitié de celle du rectangle.

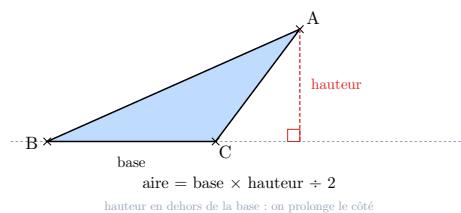


Fig. 13. – La formule vaut encore quand la hauteur tombe en dehors de la base.

### Exemple

Un triangle a une base de 7,5 cm et une hauteur relative de 4 cm :

$$\mathcal{A} = \frac{7,5 \times 4}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}^2.$$

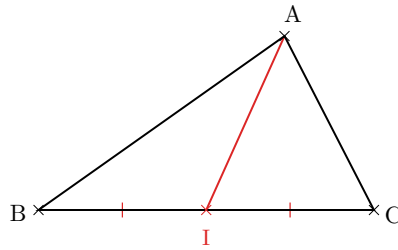
### Remarque

Les trois couples base-hauteur d'un même triangle donnent la même aire : c'est un bon moyen de retrouver une hauteur quand on connaît l'aire et une base.

## V - Médianes et partage des aires

### Définition 3

La **médiane** issue d'un sommet est le segment qui joint ce sommet au **milieu** du côté opposé.

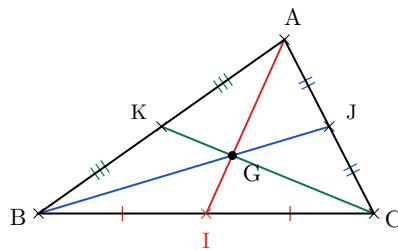


(AI) est la médiane issue de A : I est le milieu de [BC]

Fig. 14. – I est le milieu de [BC] : [AI] est la médiane issue de A.

### Propriété 7

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes : leur point commun s'appelle le **centre de gravité** du triangle.



les trois médianes se coupent en G, le centre de gravité

Fig. 15. – Les trois médianes se coupent en G.

### Propriété 8

Une médiane partage le triangle en deux triangles de **même aire**.

### Démonstration

Soit [AI] la médiane issue de A dans le triangle ABC.

#### On sait que

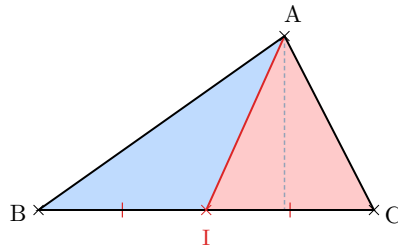
Les triangles ABI et AIC ont des bases [BI] et [IC] de même longueur, puisque I est le milieu de [BC].

#### Or

Ces deux bases sont portées par la même droite (BC), et les deux triangles ont le même sommet A : la hauteur issue de A est la même pour les deux.

#### Donc

Leurs aires, égales à  $\text{base} \times \text{hauteur} \div 2$ , sont égales.



une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire

Fig. 16. – Même base, même hauteur : les deux triangles ont la même aire.

**Exemple**

Un triangle d'aire  $24 \text{ cm}^2$  est partagé par une médiane en deux triangles de  $12 \text{ cm}^2$  chacun.  
Les trois médianes le partagent finalement en six triangles de même aire,  $4 \text{ cm}^2$  chacun.