

Proportionnalité

I - Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition 1

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si on passe des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre en multipliant toujours par un **même** nombre.

Exemples

- Le côté d'un carré et son périmètre sont proportionnels : on multiplie toujours par 4.
- Le nombre d'articles identiques achetés et le prix payé sont proportionnels : on multiplie par le prix d'un article.
- La durée d'un trajet à vitesse constante et la distance parcourue sont proportionnelles.

Exemples — Contre-exemples

- L'âge d'une personne et sa taille ne sont **pas** proportionnels : à 20 ans, on ne mesure pas le double de sa taille à 10 ans.
- Le côté d'un carré et son aire ne sont **pas** proportionnels : en doublant le côté, l'aire est multipliée par 4.
- Un abonnement à 10 € par mois plus 2 € par séance n'est **pas** proportionnel au nombre de séances : sans séance, on paie déjà 10 €.

Méthode 1 — Vérifier une proportionnalité dans un tableau

1. Calculer, pour chaque colonne, le quotient de la valeur du bas par la valeur du haut.
2. Si tous ces quotients sont égaux, les grandeurs sont proportionnelles, et ce quotient commun est le coefficient.
3. S'il en existe deux différents, elles ne le sont pas — un seul suffit à conclure.

Exemple

Nombre de pommes	2	5	10
Prix (€)	1,6	4	8

$$\frac{1,6}{2} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Les quotients sont tous égaux : il y a proportionnalité.

Exemple

Âge (ans)	2	10	20
Taille (cm)	85	140	175

$$\frac{85}{2} = 42,5$$

mais

$$\frac{140}{10} = 14.$$

Les quotients diffèrent : il n'y a pas proportionnalité.

II - Coefficient de proportionnalité

Définition 2

Le nombre par lequel on multiplie s'appelle le **coefficient de proportionnalité**. Il se lit d'une ligne du tableau à l'autre.

Masse (kg)	1	4	7
Prix (€)	3	12	21

Fig. 1. – Le coefficient 3 fait passer de la masse au prix, colonne par colonne.

Méthode 2 — Quatre façons de compléter un tableau

- **Coefficient** : multiplier une ligne entière par le coefficient.
- **Homogénéité** : multiplier (ou diviser) une colonne entière par un même nombre.
- **Additivité** : additionner deux colonnes pour en obtenir une troisième.
- **Passage à l'unité** : obtenir d'abord la colonne du 1, puis multiplier par ce qu'on veut.

Exemple

6 kg de pommes coûtent 18 €. Combien coûtent 4 kg ?

Masse (kg)	6	1	4
Prix (€)	18	3	12

Passage à l'unité : $18 \div 6 = 3$ € le kilogramme, puis $3 \times 4 = 12$ €.

Exemple — Vitesse moyenne

Une voiture parcourt 180 km en 2 h. Le coefficient de proportionnalité, ici $180 \div 2 = 90$, est sa **vitesse moyenne**, en kilomètres par heure. En 5 h, elle parcourt $90 \times 5 = 450$ km.

Exemple — Échelle

Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{25000}$, 1 cm représente 25000 cm, soit 250 m. Une distance de 6 cm sur la carte correspond donc à $6 \times 250 = 1500$ m.

Remarque

Un coefficient de proportionnalité a presque toujours un **sens concret** : prix unitaire, vitesse, échelle, masse volumique. Le nommer, c'est déjà comprendre la situation.

III - Proportions et pourcentages**Définition 3**

Une **proportion** est le quotient d'une partie par le tout. Un **pourcentage** est une proportion écrite avec le dénominateur 100 : $t\%$ signifie $\frac{t}{100}$.

Méthode 3 — Appliquer un pourcentage

Prendre $t\%$ d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemple

$$25\% \text{ de } 50 \text{ €} = \frac{25}{100} \times 50 = 12,5 \text{ €}.$$

Méthode 4 — Calculer un pourcentage

Pour savoir quel pourcentage une partie représente d'un tout, on calcule

$$\frac{\text{partie}}{\text{tout}} \times 100.$$

Exemple

Un article passe de 80 € à 50 €. La remise est de $80 - 50 = 30$ €, soit

$$\frac{30}{80} \times 100 = 37,5 \text{ \%}.$$

Le prix a diminué de 37,5 %.

Méthode 5 — Retrouver le prix de départ

Une diminution de 30% laisse 70% du prix : le tableau de proportionnalité relie le prix et le pourcentage correspondant.

Exemple

Après une baisse de 30%, un article coûte 42 €.

Prix (€)	?	42
Pourcentage (%)	100	70

On passe de la première colonne à la seconde en multipliant par $\frac{70}{100}$; dans l'autre sens on divise :

$$42 \div \frac{70}{100} = 42 \times \frac{100}{70} = 60.$$

Le prix de départ était de 60 €.

Remarque

Deux baisses successives ne s'additionnent pas : -20% puis -10% ne font pas -30% , car la seconde baisse porte sur un prix déjà diminué.

IV - Représenter une situation de proportionnalité

Notation

Un tableau de proportionnalité indique toujours les grandeurs et leurs unités : des nombres seuls, sans signification, ne se comparent pas.

Propriété 1 — Caractérisation graphique

Dans un repère, une situation de proportionnalité se reconnaît à ceci : les points sont **alignés avec l'origine** du repère.

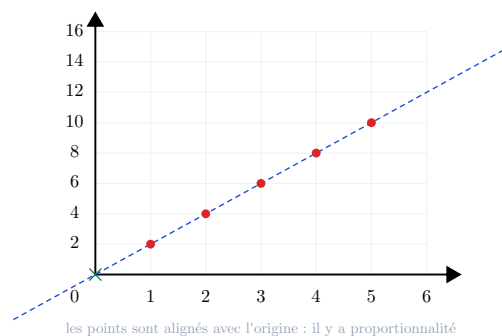


Fig. 2. — Les points sont alignés et la droite passe par l'origine : proportionnalité.

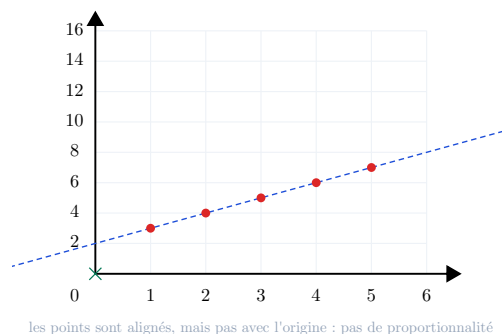


Fig. 3. — Alignés, mais la droite ne passe pas par l'origine : ce n'est pas de la proportionnalité.

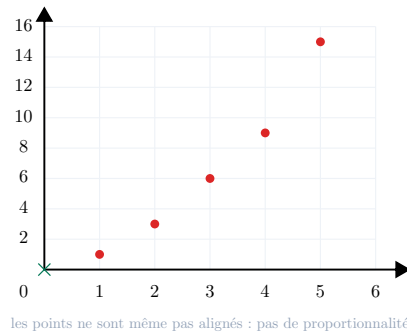


Fig. 4. – Points non alignés : il n'y a pas non plus proportionnalité.

Méthode 6 — Lire un nuage de points

1. Vérifier si les points sont alignés.
2. S'ils le sont, prolonger la droite jusqu'à l'axe vertical : passe-t-elle par l'origine ?
3. Les deux conditions ensemble, et elles seules, caractérisent la proportionnalité.

Remarque

L'origine se justifie par le sens : 0 article acheté coûte 0 €. Toute situation où « rien » coûte déjà quelque chose n'est pas proportionnelle.