

Fractions

I - Fraction et quotient

Définition 1

Soient deux nombres a et b , avec $b \neq 0$. Le **quotient** de a par b est le nombre qui, multiplié par b , donne a .

Notation

Ce quotient se note $\frac{a}{b}$: a est le **numérateur**, b le **dénominateur**.

Propriété 1

$$\frac{a}{b} \times b = a.$$

Exemples

- $\frac{7}{3}$ est le quotient de 7 par 3, et $\frac{7}{3} \times 3 = 7$.
- $\frac{17}{6}$ est le quotient de 17 par 6, et $\frac{17}{6} \times 6 = 17$.

Remarque

Un quotient n'est pas toujours un nombre décimal : $7 \div 3 = 2,333\dots$ ne s'arrête pas. L'écriture fractionnaire $\frac{7}{3}$, elle, est **exacte** : c'est une raison de la préférer.

II - Égalité de fractions

Définition 2

Deux fractions sont **égales** lorsqu'elles représentent le même quotient.

Propriété 2

Un quotient ne change pas si on multiplie — ou si on divise — son numérateur **et** son dénominateur par un même nombre non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}.$$

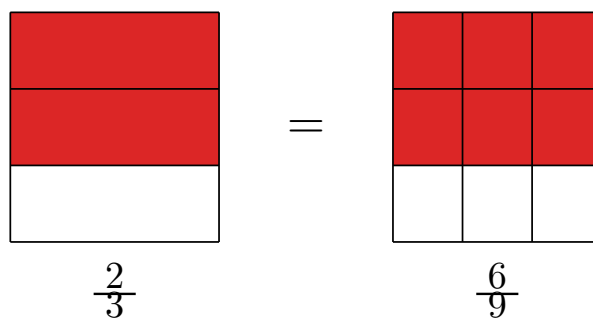


Fig. 1. – La même part du rectangle, découpée deux fois plus finement : l'aire coloriée ne change pas.

Exemples

- $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$.
- $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$.

Définition 3

Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même facteur commun. Une fraction est **irréductible** quand on ne peut plus la simplifier.

Méthode 1 — Simplifier une fraction

1. Chercher un diviseur commun au numérateur et au dénominateur — les critères de divisibilité aident.
2. Diviser les deux par ce nombre.
3. Recommencer tant qu'un diviseur commun subsiste.

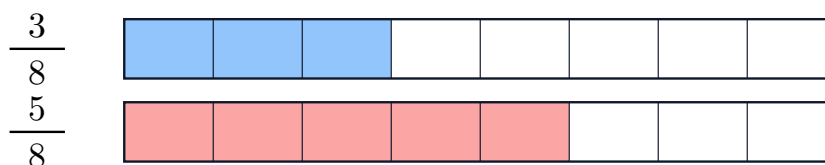
Exemples

- $\frac{6}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}$.
- $\frac{121}{176} = \frac{11 \times 11}{16 \times 11} = \frac{11}{16}$.
- $\frac{540}{720} = \frac{3}{4}$, en simplifiant successivement par 10, par 2, puis par 9.

III - Comparer des fractions

Propriété 3 — Même dénominateur

Deux fractions de même dénominateur se comparent par leurs numérateurs : la plus grande est celle dont le numérateur est le plus grand.

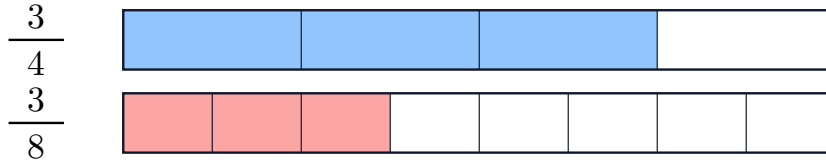


même dénominateur : la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur

Fig. 2. – $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$: les parts sont de la même taille, il y en a simplement plus.

Propriété 4 — Même numérateur

Deux fractions de même numérateur se comparent par leurs dénominateurs : la plus grande est celle dont le dénominateur est le plus **petit**, car ses parts sont plus grandes.



même numérateur : plus le dénominateur est grand, plus les parts sont petites

Fig. 3. – $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$: autant de parts, mais des parts plus petites.

Méthode 2 — Comparer deux fractions quelconques

1. Réécrire les deux fractions avec un même dénominateur, en choisissant de préférence un multiple commun des deux dénominateurs.
2. Comparer alors les numérateurs.

Exemple

Comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{8}$. Un dénominateur commun est 24 :

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24} \quad \text{et} \quad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}.$$

Comme $16 > 15$, on a $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$.

Propriété 5 — Comparer à 1

Une fraction est plus petite que 1 si son numérateur est plus petit que son dénominateur, égale à 1 s'ils sont égaux, plus grande que 1 sinon.

Exemples

- $\frac{7}{9} < 1$, car $7 < 9$.
- $\frac{12}{12} = 1$.
- $\frac{11}{4} > 1$, car $11 > 4$.

IV - Additionner et soustraire des fractions**Propriété 6**

Deux fractions de **même dénominateur** s'additionnent (ou se soustraient) en additionnant (ou soustrayant) les numérateurs, sans toucher au dénominateur :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}.$$

Exemples

- $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.
- $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$.

- $\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

Méthode 3 — Dénominateurs différents

1. Chercher un dénominateur commun : souvent, l'un des deux dénominateurs est déjà un multiple de l'autre.
2. Réécrire chaque fraction avec ce dénominateur.
3. Additionner ou soustraire les numérateurs, puis simplifier le résultat.

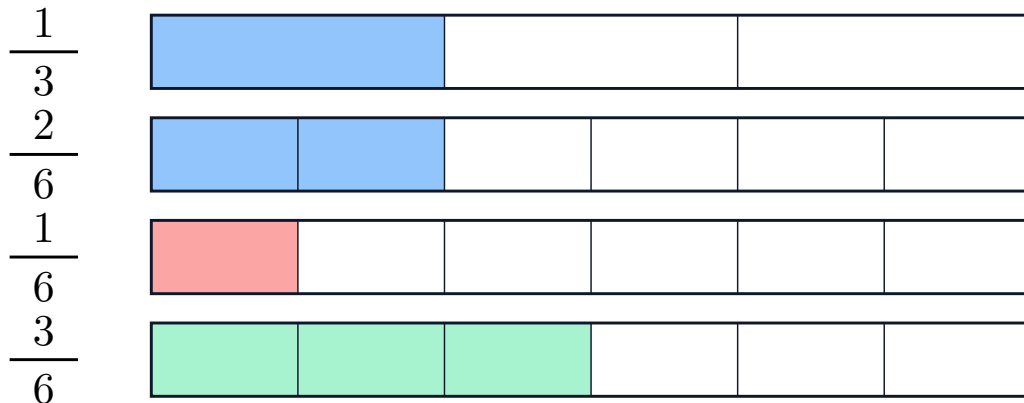


Fig. 4. — $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$: on réécrit $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{6}$, et la somme se lit $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exemples

- $\frac{3}{7} + \frac{2}{21} = \frac{9}{21} + \frac{2}{21} = \frac{11}{21}$, car $21 = 7 \times 3$.
- $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$.
- $\frac{2}{5} + \frac{3}{15} = \frac{6}{15} + \frac{3}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Remarque

Quand aucun dénominateur n'est multiple de l'autre, leur **produit** convient toujours : $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6}{24} + \frac{4}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$. Il reste alors à simplifier.

Notation

Un nombre entier s'écrit aussi en fraction : $1 = \frac{16}{16}$, $3 = \frac{3}{1} = \frac{15}{5}$. C'est ce qui permet de le mêler à un calcul de fractions.

V - Problèmes

Exemple — Le partage d'un gâteau

Albert prend $\frac{1}{2}$ du gâteau, Bernard $\frac{1}{8}$, Camille $\frac{3}{16}$. Que reste-t-il pour Danielle ?

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{16} = \frac{16}{16} - \frac{8}{16} - \frac{2}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{16}.$$

Il reste $\frac{3}{16}$ du gâteau.

Exemple — Un disque dur

Un tiers de l'espace sert aux vidéos, un sixième aux images, un vingt-quatrième aux logiciels. Quelle fraction reste libre ?

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} &= \frac{24}{24} - \frac{8}{24} - \frac{4}{24} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

Un peu moins de la moitié de l'espace est libre.

Méthode 4 — Résoudre un problème de fractions

1. Repérer à quoi correspond le « tout », c'est-à-dire le 1 : le gâteau entier, l'espace disque, la journée.
2. Écrire toutes les parts avec un même dénominateur.
3. Effectuer les additions et soustractions, puis simplifier.
4. Revenir à l'énoncé : la fraction obtenue répond-elle à la question posée ?

Remarque

Deux fractions ne se comparent, ne s'ajoutent et ne se retranchent que si elles portent sur le **même** tout. La moitié d'une petite pizza n'est pas la moitié d'une grande.