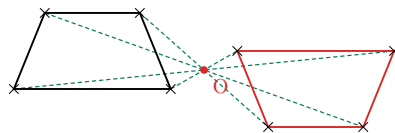


Symétrie centrale

I - Le demi-tour

Définition 1

Deux figures sont **symétriques par rapport à un point O** si, en faisant pivoter le plan d'un demi-tour autour de O , elles se superposent. Le point O est le **centre de symétrie**, et cette transformation s'appelle la **symétrie centrale** de centre O .

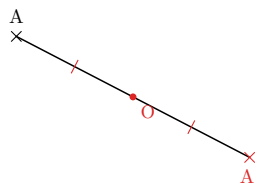


la figure rouge est l'image de la noire par le demi-tour de centre O

Fig. 1. – Chaque sommet et son image sont alignés avec O , de part et d'autre.

Théorème-Définition 1

Le **symétrique** d'un point A par rapport à O est l'unique point A' tel que O soit le **milieu** du segment $[AA']$.



O est le milieu de $[AA']$

Fig. 2. – A' est le symétrique de A par rapport à O : $OA = OA'$, et les trois points sont alignés.

Remarque

Le symétrique de O par rapport à O est O lui-même : c'est le seul point qui ne bouge pas.

Pour mieux comprendre

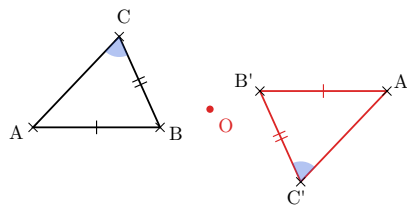
La symétrie axiale retourne la figure comme dans un miroir ; la symétrie centrale la fait pivoter d'un demi-tour, sans la retourner. Une figure et son image par une symétrie centrale se lisent « à l'envers », comme une carte à jouer.

II - Propriétés du demi-tour

Propriété 1 — Conservation

La symétrie centrale conserve :

- la **nature** des figures : le symétrique d'un carré est un carré, celui d'un cercle un cercle de même rayon ;
- les **longueurs** : le symétrique d'un segment de 5 cm est un segment de 5 cm ;
- les **mesures des angles** : le symétrique d'un angle de 90° est un angle de 90° ;
- les **aires** et l'alignement des points.

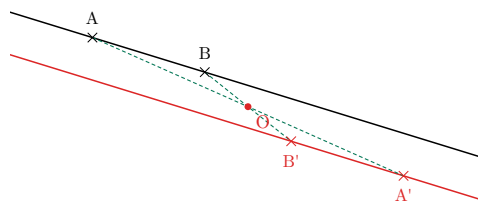


longueurs et angles sont conservés

Fig. 3. – Les côtés codés de la même façon ont la même longueur, et l'angle marqué garde sa mesure.

Propriété 2 — Lien avec le parallélisme

L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est **parallèle**.



l'image d'une droite est une droite parallèle

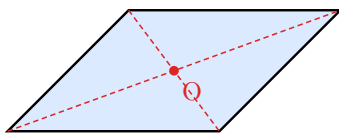
Fig. 4. – $(A'B')$, image de (AB) , lui est parallèle.

Remarque

C'est une différence nette avec la symétrie axiale, où l'image d'une droite n'est en général pas parallèle à la droite de départ.

Définition 2

Un point O est un **centre de symétrie** d'une figure si la figure est sa propre image par le demi-tour de centre O .



point d'intersection des diagonales est centre de symétrie

Fig. 5. – Le parallélogramme a un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales.



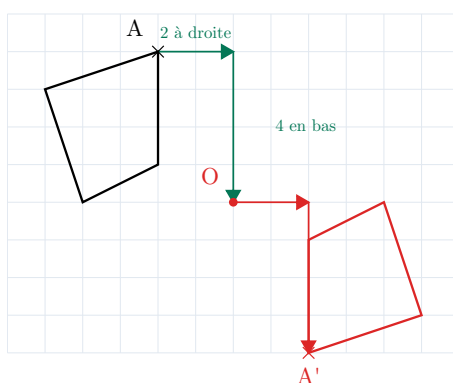
un triangle n'a jamais de centre de symétrie

Fig. 6. – Un triangle n'a pas de centre de symétrie.

III - Construire des symétriques

Protocole — Sur quadrillage

1. Compter le déplacement qui mène du point au centre : tant de carreaux horizontalement, tant de carreaux verticalement.
2. Repartir du centre et refaire exactement le même déplacement, en continuant dans le même sens.
3. Recommencer pour chaque sommet, puis relier les images dans le même ordre.



on refait de l'autre côté du centre le chemin qui mène au centre

Fig. 7. – Le chemin qui va de A à O se prolonge de l'autre côté, à l'identique : on arrive en A' .

Protocole — Sans quadrillage, à la règle et au compas

1. Tracer la demi-droite $[AO)$.
2. Reporter au compas la longueur OA à partir de O , sur cette demi-droite, au-delà de O : on obtient A' .
3. Recommencer pour chaque sommet de la figure.

Méthode 1 — Tirer parti des propriétés

Tous les sommets ne demandent pas le même travail : puisque les longueurs sont conservées et que les droites deviennent des droites parallèles, il suffit souvent de construire deux ou trois points, puis de terminer la figure en reportant les longueurs connues.

Exemple

Pour construire l'image d'un segment $[AB]$, il suffit de construire A' et B' , puis de les relier : l'image du segment est le segment $[A'B']$, de même longueur, porté par une droite parallèle à (AB) .