

Calcul littéral : expressions

I - Produire des formules

Définition 1

Une **expression littérale** est un calcul contenant des nombres et des lettres. Chaque lettre, appelée **variable**, désigne un nombre qui peut changer.

Convention — Écriture

Le signe $\times$ est facultatif devant une lettre ou une parenthèse :

- ab signifie $a \times b$;
- $3a$ signifie $3 \times a$;
- $3(a + 2)$ signifie $3 \times (a + 2)$.

En revanche, il reste indispensable entre deux nombres : 3×5 ne s'écrit pas 35.

Exemple

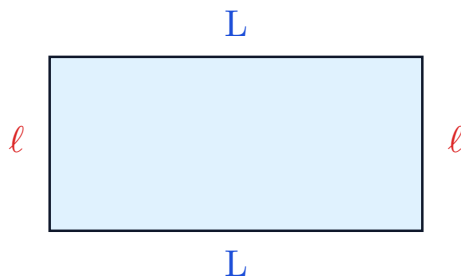
$3a + 2b$ est une expression littérale à deux variables, composée de deux multiplications et d'une addition.

Méthode 1 — Produire une formule

1. Nommer par une lettre la grandeur qui peut varier.
2. Écrire, avec cette lettre, les opérations décrites par l'énoncé.
3. Vérifier la formule sur un cas particulier connu.

Exemples

- Le double d'un nombre n : $2n$; son triple : $3n$.
- Le successeur de n : $n + 1$; son prédécesseur : $n - 1$.
- Le périmètre d'un carré de côté c : $4c$.
- Le périmètre d'un rectangle de dimensions L et l : $2(L + l)$.
- L'aire d'un triangle de base b et de hauteur h : $\frac{b \times h}{2}$.



$$= L + l + L + l = 2 L + 2 l = 2 (L +$$

Fig. 1. – Le périmètre s'écrit de plusieurs façons, toutes égales : c'est la même longueur.

Exemple — Un programme de calcul

« Choisir un nombre, le multiplier par 3, puis ajouter 5 ». En notant x le nombre choisi, le programme s'écrit d'un trait : $3x + 5$.

II - Substituer et tester une égalité

Définition 2

Évaluer une expression, ou **substituer**, c'est remplacer chaque lettre par une valeur donnée, puis effectuer les calculs.

Méthode 2 — Substituer sans se tromper

1. Réécrire l'expression en remettant les signes $\times$ sous-entendus.
2. Remplacer chaque lettre par sa valeur, entre parenthèses si elle est négative.
3. Effectuer en respectant les priorités opératoires.

Exemples

- $3a + 8$ pour $a = 4$: $3 \times 4 + 8 = 12 + 8 = 20$.
- $3a + 8$ pour $a = -2$: $3 \times (-2) + 8 = -6 + 8 = 2$.
- $2(L + l)$ pour $L = 8$ et $l = 3$: $2 \times (8 + 3) = 22$.

Définition 3

Tester une égalité, c'est vérifier si elle est vraie pour une valeur particulière de la variable, en calculant séparément chacun de ses deux **membres**.

Méthode 3

1. Remplacer la lettre par la valeur dans le membre de gauche, et calculer.
2. Faire de même avec le membre de droite.
3. Conclure : l'égalité est vraie pour cette valeur si les deux résultats sont égaux, fausse sinon.

Exemple

Tester $2(x + 3) = 2x + 6$ pour $x = 4$:

- membre de gauche : $2 \times (4 + 3) = 2 \times 7 = 14$;
- membre de droite : $2 \times 4 + 6 = 8 + 6 = 14$.

L'égalité est vraie pour $x = 4$.

Exemple

Tester $5x = 3x + 2$ pour $x = 1$, puis pour $x = 4$:

- pour $x = 1$: 5 d'un côté, $3 + 2 = 5$ de l'autre : **vraie** ;
- pour $x = 4$: 20 d'un côté, $12 + 2 = 14$ de l'autre : **fausse**.

Remarque

Un test ne prouve rien de général : une égalité vraie pour une valeur peut être fausse pour une autre. En revanche, une seule valeur qui la met en défaut suffit à montrer qu'elle n'est pas toujours vraie.

III - Sommes, produits, développer et réduire

Méthode 4 — Reconnaître la nature d'une expression

Une expression littérale est une **somme** ou un **produit** selon la dernière opération qu'on y effectuerait.

Exemples

- $3x + 5$ est une **somme** de deux termes : $3x$ et 5.
- $3(x + 5)$ est un **produit** de deux facteurs : 3 et $(x + 5)$.
- $2a + 3b$ est une somme ; $2ab$ est un produit.

Propriété 1 — Distributivité

Pour tous nombres k , a et b :

$$k(a + b) = ka + kb \quad \text{et} \quad k(a - b) = ka - kb.$$

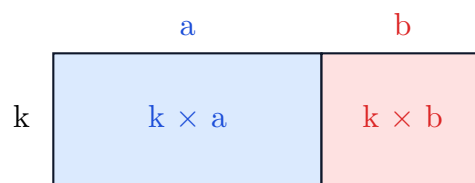


Fig. 2. – L'aire du grand rectangle se lit $k(a + b)$ ou $ka + kb$: ce sont deux écritures de la même aire.

Définitions

- **Développer** une expression, c'est transformer un produit en somme.

- **Factoriser**, c'est l'inverse : transformer une somme en produit, en mettant en évidence un facteur commun.

Exemples — Développer

- $4(x + 3) = 4x + 12$.
- $5(2a - 7) = 10a - 35$.
- $x(x + 2) = x \times x + 2x$.

Exemples — Factoriser

- $3x + 3y = 3(x + y)$.
- $7a - 21 = 7(a - 3)$.
- $x + x \times 5 = x(1 + 5) = 6x$.

Propriété 2 — Réduire

Deux termes qui contiennent la même lettre s'ajoutent :

$$ax + bx = (a + b)x.$$

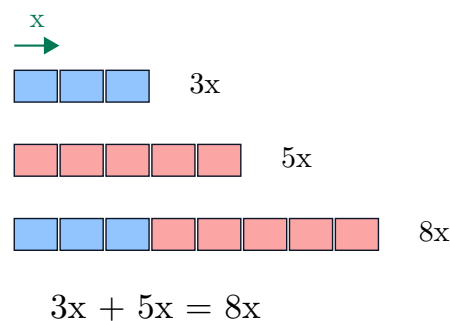


Fig. 3. – Trois longueurs x puis cinq longueurs x font huit longueurs x .

Exemples

- $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$.
- $7a - 2a = (7 - 2)a = 5a$.
- $4,5x + 1,5x = 6x$.
- $4x + 3 + 2x + 5 = 6x + 8$.

Remarque

On ne réduit que des termes **semblables** : $3x + 5$ ne se réduit pas, car $3x$ et 5 ne comptent pas la même chose. De même, $2a + 3b$ reste tel quel.

IV - Démontrer, réfuter, conjecturer

Méthode 5 — Démontrer une propriété générale

Pour prouver qu'une propriété vaut pour **tous** les nombres, on nomme le nombre par une lettre, on traduit l'énoncé en expression littérale, puis on transforme cette expression jusqu'à la forme annoncée.

Exemple

« La somme de deux entiers consécutifs est impaire. » Soit n un entier. Les deux entiers consécutifs s'écrivent n et $n + 1$, et

$$n + (n + 1) = 2n + 1.$$

Or $2n$ est pair, donc $2n + 1$ est impair, quel que soit n . La propriété est démontrée.

Exemple

« Le programme : choisir un nombre, lui ajouter 3, multiplier par 2, puis enlever le double du nombre choisi, donne toujours 6. »

$$2(x + 3) - 2x = 2x + 6 - 2x = 6.$$

Le résultat ne dépend plus de x : c'est bien toujours 6.

Méthode 6 — Réfuter par un contre-exemple

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit d'exhiber **une seule** valeur qui la met en défaut : c'est un **contre-exemple**.

Exemple

« $5x = 3x + 2$ pour tout nombre x » est fausse : pour $x = 4$, on obtient $20 \neq 14$. Un seul contre-exemple suffit.

Remarque

Vérifier une affirmation sur trois exemples ne la démontre pas ; trouver un seul contre-exemple la réfute définitivement. Les deux démarches n'ont pas du tout la même portée.

Protocole — Conjecturer avec un tableur ou un algorithme

1. Faire calculer l'expression pour de nombreuses valeurs de la variable.
2. Observer une régularité dans la colonne des résultats : c'est la **conjecture**.
3. La démontrer ensuite par le calcul littéral — l'ordinateur suggère, il ne prouve pas.