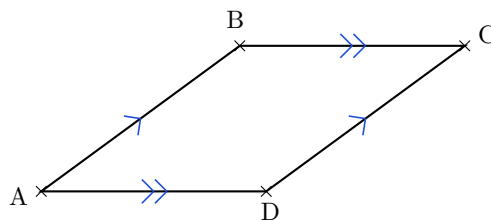


Parallélogrammes

I - Définition et constructions

Définition 1

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont **parallèles** deux à deux.



$(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$

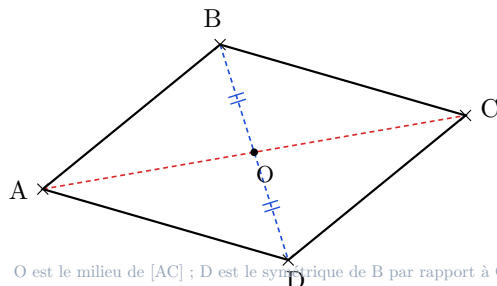
Fig. 1. – (AB) est parallèle à (DC) , et (AD) est parallèle à (BC) .

Propriété 1

Un parallélogramme a un **centre de symétrie** : le point d'intersection de ses diagonales. Il est sa propre image par le demi-tour autour de ce point.

Protocole — Construire un parallélogramme à partir de trois sommets

1. Tracer la diagonale joignant deux sommets opposés, par exemple $[AC]$.
2. Placer son milieu O .
3. Construire le symétrique du troisième sommet B par rapport à O : c'est le quatrième sommet D .



O est le milieu de $[AC]$; D est le symétrique de B par rapport à O

Fig. 2. – D est le symétrique de B par rapport à O , milieu de $[AC]$.

Protocole — Au compas, avec les longueurs

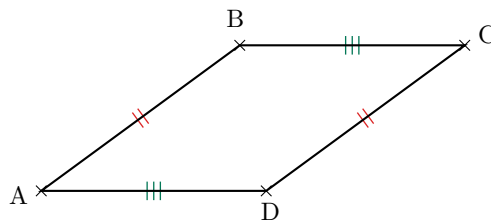
1. Tracer le côté $[AB]$.
2. Tracer un arc de centre B , de rayon AD , et un arc de centre D , de rayon AB .

3. Leur intersection donne le quatrième sommet C .

II - Propriétés caractéristiques

Propriété 2 — Côtés opposés

Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la **même longueur**.

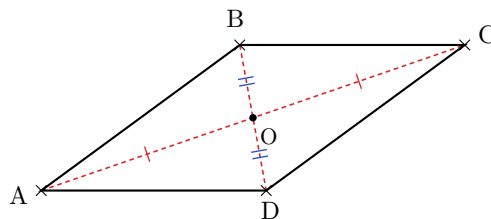


les côtés opposés ont la même longueur

Fig. 3. – $AB = DC$ et $AD = BC$.

Propriété 3 — Diagonales

Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur **milieu**.

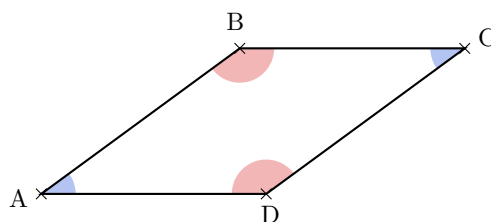


les diagonales se coupent en leur milieu

Fig. 4. – O est à la fois le milieu de $[AC]$ et celui de $[BD]$.

Propriété 4 — Angles

- Les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure.
- Deux angles consécutifs sont supplémentaires : leur somme vaut 180° .
- La somme des quatre angles vaut 360° .



les angles opposés sont égaux ; deux angles consécutifs sont supplémentaires

Fig. 5. – Les angles de même couleur sont égaux ; deux angles voisins totalisent 180° .

Théorème 1 — Propriétés caractéristiques

Un quadrilatère non croisé est un parallélogramme **si et seulement si** l'une de ces conditions est vérifiée :

- ses côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
- ses côtés opposés ont deux à deux la même longueur ;
- ses diagonales se coupent en leur milieu ;
- deux de ses côtés opposés sont à la fois parallèles et de même longueur.

Méthode 1 — Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

1. Choisir, parmi les propriétés caractéristiques, celle dont l'hypothèse est déjà donnée dans l'énoncé.
2. Écrire ce que l'on sait, puis la propriété utilisée, puis la conclusion.

Exemple

On sait que

$ABCD$ est un quadrilatère non croisé dont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O .

Or

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Donc

$ABCD$ est un parallélogramme.

Remarque

L'hypothèse « non croisé » n'est pas un détail : deux segments de même longueur peuvent aussi former un quadrilatère croisé, qui n'est pas un parallélogramme.

III - Parallélogrammes particuliers

Définition 2

Un **rectangle** est un parallélogramme qui a un angle droit.

Démonstration — Les quatre angles d'un rectangle sont droits

On sait que

$ABCD$ est un parallélogramme et $\widehat{DAB} = 90^\circ$.

Or

Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux et deux angles consécutifs sont supplémentaires.

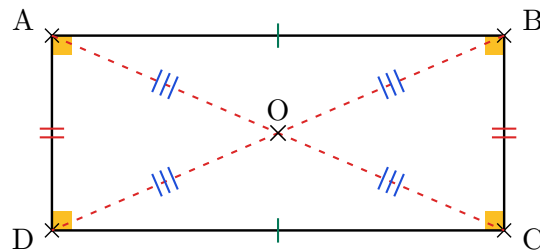
Donc $\widehat{BCD} = 90^\circ$, puis $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$: les quatre angles sont droits.**Propriété 5**Les diagonales d'un rectangle ont la **même longueur**, et se coupent en leur milieu.

Fig. 6. – Le rectangle : quatre angles droits, des diagonales égales qui se coupent en leur milieu.

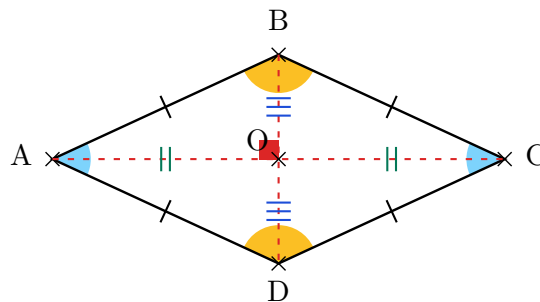
Définition 3Un **losange** est un parallélogramme dont tous les côtés ont la même longueur.**Propriété 6**Les diagonales d'un losange sont **perpendiculaires**, et se coupent en leur milieu. Elles sont aussi ses axes de symétrie.

Fig. 7. – Le losange : quatre côtés égaux, des diagonales perpendiculaires.

Définition 4Un **carré** est à la fois un rectangle et un losange : il hérite de toutes leurs propriétés.**Propriété 7**

Les diagonales d'un carré sont de même longueur, perpendiculaires, et se coupent en leur milieu.

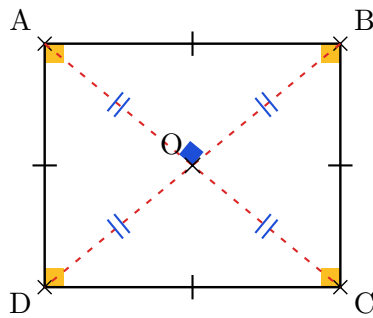


Fig. 8. – Le carré cumule les propriétés du rectangle et celles du losange.

Méthode 2 — Donner la nature d'un quadrilatère

1. Établir d'abord que c'est un parallélogramme.
2. Chercher ensuite l'élément qui le spécialise : un angle droit en fait un rectangle, deux côtés consécutifs égaux (ou des diagonales perpendiculaires) en font un losange, les deux à la fois un carré.

IV - Aire d'un parallélogramme et conversions

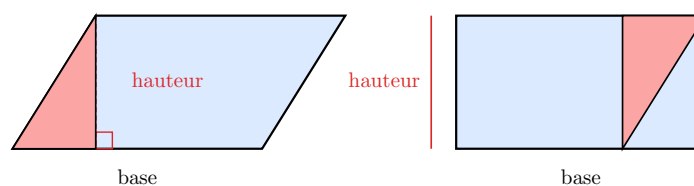
Formule

$$\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = \text{base} \times \text{hauteur}$$

où la hauteur est la distance entre la base et le côté qui lui est parallèle.

Pour mieux comprendre

En découpant le triangle qui dépasse d'un côté et en le recollant de l'autre, le parallélogramme devient un rectangle de même base et de même hauteur : l'aire n'a pas changé.



$$\text{aire du parallélogramme} = \text{base} \times \text{hauteur}$$

Fig. 9. – Découper, recoller : le parallélogramme devient un rectangle.

Formules

- $\mathcal{A}_{\text{carré}} = c \times c$
- $\mathcal{A}_{\text{rectangle}} = L \times l$
- $\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$
- $\mathcal{A}_{\text{losange}} = \frac{D \times d}{2}$, où D et d sont les diagonales

Exemple

Un parallélogramme de base 7,5 cm et de hauteur 4 cm a pour aire

$$7,5 \times 4 = 30 \text{ cm}^2.$$

Remarque

La hauteur n'est **pas** la longueur du côté oblique : c'est la distance perpendiculaire entre les deux côtés parallèles.

Méthode 3 — Aire d'une figure complexe

1. Découper la figure en carrés, rectangles, triangles et parallélogrammes.
2. Calculer l'aire de chaque morceau.
3. Additionner — ou soustraire, si un morceau est un trou.

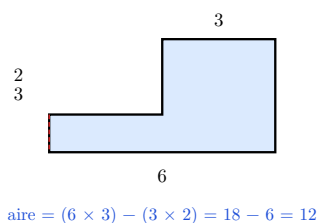


Fig. 10. — Une figure complexe se ramène toujours à des figures connues.

Notation — Unités de longueur

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
----	----	-----	---	----	----	----

Chaque colonne vers la droite multiplie par 10.

Exemples

- 85 cm = 850 mm.
- 5 m = 0,005 km.
- 3,2 dam = 320 dm.

Notation — Unités d'aire

km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
-----------------	-----------------	------------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Chaque colonne vers la droite multiplie par 100 : deux chiffres par colonne, et non un seul.

Exemples

- 1,5 m² = 15 000 cm².
- 0,02 hm² = 0,000 2 km².
- 10 ha = 100 000 m², car 1 ha = 1 hm².

Remarque

L'erreur la plus fréquente est de convertir une aire comme une longueur : 1 m^2 vaut $10\,000 \text{ cm}^2$, et non 100. Un carré de 1 m de côté contient bien 100×100 carrés de 1 cm de côté.