

Équations

I - La lettre comme inconnue

Définition 1

Une **équation** est une égalité contenant une lettre, dont on cherche la ou les valeurs qui la rendent vraie. Cette lettre s'appelle l'**inconnue**.

Définition 2

Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie. **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Remarque

La lettre n'a plus ici le même rôle que dans une formule. Dans $P = 4c$, la lettre c est une **variable** : elle prend toutes les valeurs qu'on veut. Dans $4c = 20$, c'est une **inconnue** : une seule valeur convient.

Méthode 1 — Vérifier qu'un nombre est solution

1. Remplacer l'inconnue par ce nombre dans le membre de gauche, et calculer.
2. Faire de même à droite.
3. Les deux résultats sont égaux : le nombre est solution. Sinon, il ne l'est pas.

Exemple

L'équation $x + 3 = 8$:

- pour $x = 5$: $5 + 3 = 8$ vrai, donc 5 est solution ;
- pour $x = 2$: $2 + 3 = 5 \neq 8$ faux, donc 2 n'est pas solution.

II - Mettre un problème en équation

Méthode 2

1. Choisir l'inconnue et la nommer : « soit x le nombre cherché ».
2. Préciser ce que x représente, avec son unité.
3. Traduire l'énoncé par une égalité entre deux expressions.
4. Résoudre l'équation, puis revenir à la question posée.

Exemple — Une opération à trou

« À quel nombre faut-il ajouter 3 pour obtenir 8 ? » Soit x ce nombre : l'énoncé se traduit par $x + 3 = 8$.

Exemple — Un prix

« 4 places de cinéma identiques coutent 34 €. Quel est le prix d'une place ? » Soit x le prix d'une place, en euros : $4x = 34$.

Exemple — Un périmètre

« Un rectangle a une largeur de 5 cm et un périmètre de 26 cm. Quelle est sa longueur ? » Soit x la longueur, en centimètres : $2(x + 5) = 26$, c'est-à-dire $x + 5 = 13$.

III - Résoudre par les opérations inverses**Pour mieux comprendre**

Une équation est une **balance en équilibre** : les deux plateaux ont le même contenu. Retirer la même chose des deux côtés, ou partager chaque côté par un même nombre, conserve l'équilibre.

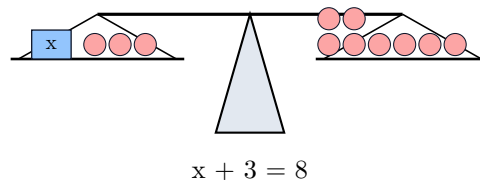


Fig. 1. – $x + 3 = 8$: la boîte inconnue et trois masses d'un côté, huit masses de l'autre.

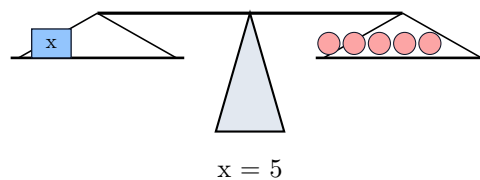


Fig. 2. – En retirant trois masses de chaque côté, l'équilibre est conservé : la boîte pèse 5.

Méthode 3 — Résoudre $x + b = c$

L'inverse de « ajouter b » est « soustraire b » : la solution est $x = c - b$.

Exemples

- $x + 3 = 8$ donne $x = 8 - 3 = 5$.
- $x + 12 = 7$ donne $x = 7 - 12 = -5$.
- $x - 4 = 9$ donne $x = 9 + 4 = 13$, car l'inverse de « soustraire 4 » est « ajouter 4 ».

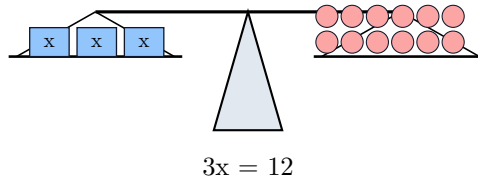


Fig. 3. – $3x = 12$: trois boîtes identiques équilibrent douze masses, donc chaque boîte en vaut 4.

Méthode 4 — Résoudre $a x = c$

L'inverse de « multiplier par a » est « diviser par a » : la solution est $x = \frac{c}{a}$, avec $a \neq 0$.

Exemples

- $3x = 12$ donne $x = \frac{12}{3} = 4$.
- $4x = 34$ donne $x = \frac{34}{4} = 8,5$.
- $\frac{x}{5} = 3$ donne $x = 3 \times 5 = 15$.

Méthode 5 — Vérifier sa solution

Toute résolution se termine par une vérification : on remplace l'inconnue par la valeur trouvée dans l'équation de départ, et on contrôle que l'égalité est vraie.

Exemple — Résolution complète

4 places de cinéma coûtent 34 €.

On sait que

Soit x le prix d'une place, en euros : $4x = 34$.

Donc

$$x = \frac{34}{4} = 8,5.$$

Vérification : $4 \times 8,5 = 34$ vrai. Une place coûte 8,5 €.

Remarque

Une équation peut n'avoir aucune solution ($x + 1 = x + 2$ n'est jamais vraie), ou en avoir une infinité ($x + 1 = 1 + x$ est toujours vraie). Celles rencontrées ici en ont exactement une.