

Espace : prismes et cylindres

I - Solides, perspective cavalière et patrons

Définitions

- Une **face** est une surface, plane ou courbe, qui délimite le solide.
- Une **arête** est un segment où deux faces se rejoignent.
- Un **sommet** est un point où plusieurs arêtes se rejoignent.
- Un **polyèdre** est un solide dont toutes les faces sont des polygones.

Remarque

La sphère, le cylindre et le cône ont des faces courbes : ce ne sont pas des polyèdres.

Définition 1

Un **prisme droit** est un solide dont les deux **bases** sont des polygones identiques et parallèles, et dont les faces latérales sont des rectangles.

Remarque

Le pavé droit est un prisme droit à base rectangulaire, et le cube un prisme droit à base carrée : ce sont des cas particuliers, pas des solides d'une autre espèce.

Définition 2

Un **cylindre de révolution** est un solide délimité par deux disques parallèles de même rayon — ses bases — et par une surface latérale courbe.

Convention — Perspective cavalière

- Les faces vues de face sont dessinées en **vraie grandeur**.
- Les arêtes parallèles dans la réalité restent parallèles sur le dessin.
- Les arêtes fuyantes sont tracées obliquement, et raccourcies.
- Les arêtes **cachées** se dessinent en **pointillés**.

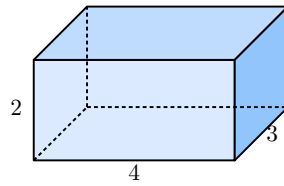
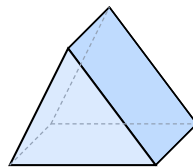


Fig. 1. – Un pavé droit en perspective cavalière : trois arêtes cachées, en pointillés.



base triangulaire

Fig. 2. – Un prisme droit à base triangulaire : les deux bases sont des triangles identiques, les trois faces latérales des rectangles.

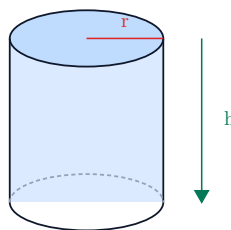
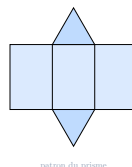


Fig. 3. – Un cylindre de révolution, de rayon r et de hauteur h : les disques se dessinent comme des ovales.

Définition 3

Un **patron** d'un solide est une figure plane qui, une fois découpée et pliée, reconstitue exactement ce solide.



patron du prisme

Fig. 4. – Le patron d'un prisme droit : les faces latérales mises bout à bout, et les deux bases rabattues.

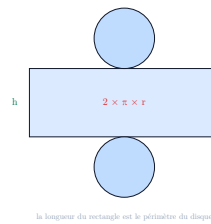


Fig. 5. – Le patron d'un cylindre : deux disques et un rectangle dont la longueur est le périmètre du disque, $2\pi r$.

Méthode 1 — Passer de la perspective au patron

1. Compter les faces du solide et reconnaître leur forme.
2. Relever les dimensions réelles de chacune — la perspective déforme, le patron non.
3. Disposer les faces en les faisant se toucher par des côtés de même longueur.

II - Unités de volume et de capacité

Définitions

- Le **volume** d'un solide est la mesure de l'espace qu'il occupe.
- La **capacité** est la mesure de ce qu'il peut contenir.

Convention

Le volume se mesure en mètres cubes (m^3) et ses sous-multiples ; la capacité en litres (L) et ses sous-multiples.

Propriété 1

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} \quad \text{et} \quad 1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L} \quad \text{et} \quad 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}.$$

Notation — Unités de volume

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
---------------	---------------	----------------	--------------	---------------	---------------	---------------

Chaque colonne vers la droite multiplie par 1 000 : trois chiffres par colonne.

Exemples

- $15 \text{ m}^3 = 15\,000\,000 \text{ cm}^3$.
- $2,5 \text{ dm}^3 = 2,5 \text{ L} = 2500 \text{ mL}$.
- $35 \text{ dL} = 3,5 \text{ L} = 0,0035 \text{ kL}$.

Remarque

Une longueur change de colonne par 10, une aire par 100, un volume par 1 000 : un chiffre, deux chiffres, trois chiffres. C'est la même logique, appliquée à une, deux, puis trois dimensions.

III - Volumes du cube, du pavé droit et du prisme droit

Formules

- $V_{\text{cube}} = a \times a \times a = a^3$
- $V_{\text{pavé droit}} = L \times l \times h$
- $V_{\text{prisme droit}} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$

Pour mieux comprendre

Un pavé droit se remplit de cubes unité : une couche en contient $L \times l$, et il y a h couches. Pour un prisme quelconque, la couche n'est plus un rectangle mais la base elle-même : d'où $\mathcal{A}_{\text{base}} \times h$.

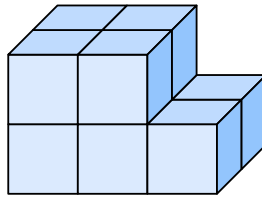


Fig. 6. – Compter les cubes unité, couche par couche : c'est ce que fait la formule.

Exemple

Un pavé droit de dimensions 5 cm, 3 cm et 4 cm a pour volume

$$V = 5 \times 3 \times 4 = 60 \text{ cm}^3,$$

soit 60 mL.

Exemple

Un prisme droit de hauteur 10 cm, dont la base est un triangle de base 6 cm et de hauteur 4 cm :

$$\mathcal{A}_{\text{base}} = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ cm}^2, \quad V = 12 \times 10 = 120 \text{ cm}^3.$$

Méthode 2 — Calculer un volume

1. Reconnaître la base du solide, et la hauteur qui lui est perpendiculaire.
2. Convertir toutes les longueurs dans la même unité.
3. Calculer l'aire de la base, puis la multiplier par la hauteur.
4. Donner le résultat avec l'unité de volume correspondante.

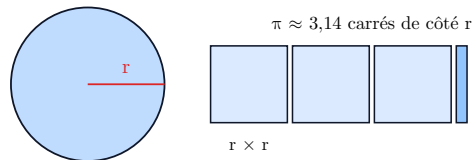
IV - Aire du disque et volume du cylindre

Formule

$$\mathcal{A}_{\text{disque}} = \pi \times r \times r = \pi r^2$$

Pour mieux comprendre

L'aire d'un disque de rayon r vaut un peu plus de trois carrés de côté r : exactement π d'entre eux.



$$\text{aire du disque} = \pi \times r \times r = \pi r^2$$

Fig. 7. – Le disque couvre $\pi \approx 3,14$ carrés de côté r .

Exemple

Aire d'un disque de rayon 5 cm :

$$\mathcal{A} = \pi \times 5 \times 5 = 25\pi \text{ cm}^2 \approx 78,54 \text{ cm}^2.$$

L'écriture 25π est la valeur **exacte** ; 78,54 en est une valeur approchée.

Exemple

Aire d'un quart de disque de rayon 8 cm :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \times \pi \times 8 \times 8 = 16\pi \text{ cm}^2 \approx 50,27 \text{ cm}^2.$$

Formule

$$V_{\text{cylindre}} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \pi r^2 \times h$$

Exemple

Un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 10 cm :

$$V = \pi \times 3 \times 3 \times 10 = 90\pi \text{ cm}^3 \approx 282,7 \text{ cm}^3,$$

soit environ 283 mL.

Remarque

Ne pas confondre le **périmètre** du disque, $2\pi r$, qui sert à tracer le patron, et son **aire**, πr^2 , qui sert à calculer un volume. L'un se mesure en centimètres, l'autre en centimètres carrés.