

CINQUIÈME

Mathématiques

Sommaire

1. Enchainements d'opérations	3
2. Repérage sur une droite et dans le plan	8
3. Nombres relatifs : découverte et comparaison	11
4. Angles et parallélisme	15
5. Statistiques	19
6. Addition et soustraction de nombres relatifs	24
7. Triangles	28
8. Proportionnalité	37
9. Fractions	42
10. Symétrie centrale	47
11. Programmation par blocs	51
12. Calcul littéral : expressions	54
13. Parallélogrammes	59
14. Puissances : carré et cube	66
15. Probabilités	69
16. Équations	73
17. Notion de fonction	76
18. Espace : prismes et cylindres	80

Chapitre 1

Enchainements d'opérations

I - Nommer un calcul

Définitions

- Le résultat d'une addition est une **somme** ; les nombres qu'on additionne sont les **termes** de la somme.
- Le résultat d'une soustraction est une **différence** ; les nombres qu'on soustrait sont aussi ses **termes**.
- Le résultat d'une multiplication est un **produit** ; les nombres qu'on multiplie sont les **facteurs** du produit.
- Le résultat d'une division est un **quotient**.

Méthode 1 — Nommer une expression

Une expression porte le nom de la **dernière** opération qu'on y effectue : c'est elle qui donne sa nature au résultat.

Exemples

- $3 + 4 \times 5$ est une **somme** : on multiplie d'abord, mais on termine par l'addition. Ses termes sont 3 et 4×5 .
- $(3 + 4) \times 5$ est un **produit** : ses facteurs sont $(3 + 4)$ et 5.
- $(7 - 2) \div 5$ est un **quotient**.

Remarque

Deux calculs peuvent avoir le même résultat sans porter le même nom : $(3 + 4) \times 5 = 35$ et $30 + 5 = 35$, mais le premier est un produit et le second une somme.

II - Priorités opératoires et parenthèses

Propriété 1 — Priorités des opérations

Dans un calcul contenant plusieurs opérations de natures différentes :

1. on effectue d'abord les calculs entre **parenthèses** ;
2. puis les **multiplications** et les **divisions**, de gauche à droite ;
3. enfin les **additions** et les **soustractions**, de gauche à droite.

Remarque

Un trait de fraction joue le rôle de parenthèses : on calcule d'abord le numérateur, puis le dénominateur, et on effectue la division en dernier.

$$\begin{aligned}
& 3 + 4 \times (2 + \boxed{3 \times 7}) \\
&= 3 + 4 \times \boxed{(2 + 21)} \\
&= 3 + \boxed{4 \times 23} \\
&= \boxed{3 + 92} \\
&= \boxed{95}
\end{aligned}$$

Fig. 1. – À chaque ligne, le calcul encadré est celui qui est prioritaire : il est le seul à changer d'une ligne à la suivante.

$$\frac{2 + 3 \times 6}{10 \div 5} = \frac{20}{10 \div 5} = \frac{20}{2} = 10$$

Fig. 2. – Avec un trait de fraction, le numérateur et le dénominateur se calculent chacun de leur côté avant la division finale.

Exemple

$$12 - 2 \times 3 = 12 - 6 = 6 \quad \text{et} \quad (12 - 2) \times 3 = 10 \times 3 = 30.$$

Les parenthèses ne sont pas un ornement : elles changent le résultat.

Méthode 2 — Contrôler la vraisemblance d'un résultat

Avant ou après un calcul, on le refait en remplaçant chaque nombre par un nombre voisin plus simple : l'ordre de grandeur obtenu doit être proche du résultat exact.

Exemples

- $2 \times \pi \times 5,9$: on approche par $2 \times 3 \times 6 = 36$, donc $2 \times \pi \times 5,9 \approx 36$.
- $0,5 \times 52,1 \times 31$: on approche par $0,5 \times 50 \times 30 = 750$.

III - Programmes de calcul et expressions

Définition 1

Un **programme de calcul** est une suite d'instructions à exécuter dans l'ordre, à partir d'un nombre choisi au départ.

Exemple

« Choisir un nombre ; lui ajouter 4 ; multiplier le résultat par 3 ; enlever 2 ». En partant de 5 : $5 + 4 = 9$, puis $9 \times 3 = 27$, puis $27 - 2 = 25$.

Méthode 3 — Traduire un programme en une seule expression

On écrit les opérations dans l'ordre du programme, en mettant entre parenthèses tout résultat intermédiaire sur lequel porte l'opération suivante.

Exemple

Le programme précédent, appliqué au nombre 5, s'écrit d'un seul trait :

$$(5 + 4) \times 3 - 2 = 9 \times 3 - 2 = 27 - 2 = 25.$$

Sans les parenthèses, $5 + 4 \times 3 - 2$ vaudrait 15 : ce ne serait plus le même programme.

Remarque

Une succession d'opérations donnée en français (« la somme de 7 et de 3, multipliée par 4 ») se traduit de la même façon : $(7 + 3) \times 4$.

IV - Distributivité sur des exemples numériques

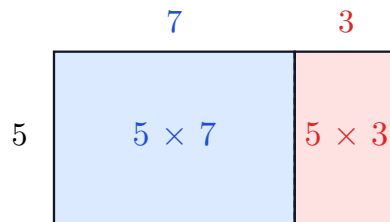
Propriété 2 — Distributivité

Multiplier une somme, c'est multiplier chacun de ses termes :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \quad \text{et} \quad k \times (a - b) = k \times a - k \times b.$$

Pour mieux comprendre

Un rectangle de hauteur k et de largeur $a + b$ se coupe en deux rectangles de largeurs a et b : son aire, $k \times (a + b)$, est la somme des deux aires $k \times a$ et $k \times b$.



$$5 \times (7 + 3) = 5 \times 7 + 5 \times 3 = 50$$

Fig. 3. – L'aire du grand rectangle se lit de deux façons : d'un bloc, $5 \times (7 + 3)$, ou en deux morceaux, $5 \times 7 + 5 \times 3$.

Exemples

- $4 \times 102 = 4 \times (100 + 2) = 400 + 8 = 408.$
- $7 \times 99 = 7 \times (100 - 1) = 700 - 7 = 693.$
- $25 \times 12 + 25 \times 8 = 25 \times (12 + 8) = 25 \times 20 = 500.$

Remarque

Lue de gauche à droite, la propriété sert à **développer** ; lue de droite à gauche, elle sert à **factoriser**, c'est-à-dire à faire apparaître un facteur commun.

V - Multiples, diviseurs et division par un décimal

Définition 2

Pour deux nombres entiers a et b , dire que a est **divisible** par b , c'est dire que a est dans la table de multiplication de b : il existe un entier k tel que $a = b \times k$.

Notation

Quatre façons de dire la même chose, à propos de $42 = 6 \times 7$:

- 42 est divisible par 6 ;
- 42 est un **multiple** de 6 ;
- 6 **divise** 42 ;
- 6 est un **diviseur** de 42.

Méthode 4 — Reconnaître un multiple

Pour savoir si un nombre est divisible par un autre, on peut :

- poser la division euclidienne et vérifier que le reste est nul ;
- ou utiliser un critère de divisibilité, quand il en existe un.

Propriété 3 — Critères par 3 et par 9

Divisible par	Critère	Exemples
3	la somme des chiffres est divisible par 3	$102 \rightarrow 1 + 0 + 2 = 3$ $113 \rightarrow 1 + 1 + 3 = 5$
9	la somme des chiffres est divisible par 9	$108 \rightarrow 1 + 0 + 8 = 9$ $113 \rightarrow 1 + 1 + 3 = 5$

Remarque

Un nombre divisible par 9 est toujours divisible par 3, puisque $9 = 3 \times 3$. La réciproque est fausse : 6 est divisible par 3 mais pas par 9.

Méthode 5 — Diviser par un nombre décimal

Un quotient ne change pas si on multiplie le dividende **et** le diviseur par un même nombre. On multiplie donc les deux par 10, 100... jusqu'à ce que le diviseur devienne un entier, puis on pose la division.

$$\begin{array}{r}
 7,2 \quad \div \quad 0,4 \\
 \downarrow \times 10 \quad \downarrow \times 10 \\
 72 \quad \div \quad 4 \\
 \\
 \begin{array}{r}
 7 \ 2 \ 4 \\
 - \ 4 \\
 \hline
 3 \ 2 \\
 - \ 3 \ 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Fig. 4. – $7,2 \div 0,4$: en multipliant les deux nombres par 10, la division devient $72 \div 4$, qui se pose.

Exemples

- $7,2 \div 0,4 = 72 \div 4 = 18$.
- $5,25 \div 0,25 = 525 \div 25 = 21$.
- $12 \div 0,5 = 120 \div 5 = 24$: diviser par 0,5, c'est multiplier par 2.

Chapitre 2

Repérage sur une droite et dans le plan

I - Repérage sur une droite graduée

Définition 1

Une **droite graduée** est composée de trois éléments :

- une droite ;
- un point choisi comme **origine**, associé au nombre 0 ;
- un point associé au nombre 1, qui fixe l'**unité**.

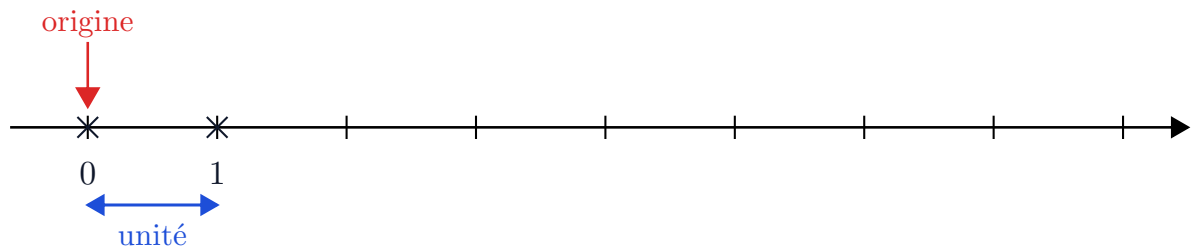


Fig. 5. – L'origine et l'unité suffisent : toutes les autres graduations s'en déduisent en reportant l'unité.

Définition 2

À chaque point d'une droite graduée correspond un nombre, appelé son **abscisse**. Si le point A a pour abscisse 3, on note $A(3)$.

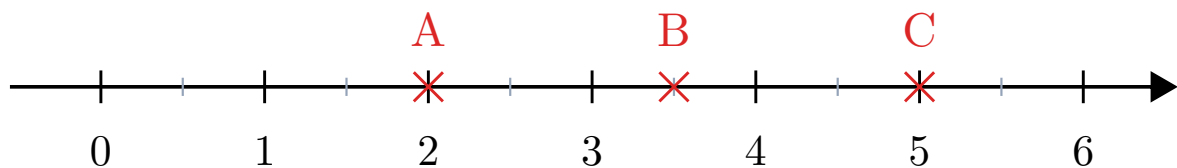


Fig. 6. – Ici $A(2)$, $B(3,5)$ et $C(5)$: on lit l'abscisse en comptant les unités depuis l'origine.

Méthode 1 — Lire une abscisse

1. Repérer l'origine, c'est-à-dire la graduation 0.
2. Regarder combien d'unités séparent deux graduations chiffrées, puis en combien de parts égales chaque unité est partagée.
3. Compter ces parts depuis l'origine jusqu'au point.

Méthode 2 — Placer un point d'abscisse donnée

On fait le chemin inverse : on part de l'origine et on avance du nombre d'unités (et de parts d'unité) indiqué par l'abscisse.

Remarque

L'abscisse d'un point n'est pas une longueur : elle dépend du choix de l'origine et de l'unité. Changer d'unité change toutes les abscisses.

II - Repérage dans le plan

Définition 3

Un **repère orthogonal** du plan est constitué :

- d'un point, l'**origine**, souvent noté O ;
- d'un axe horizontal gradué, l'**axe des abscisses** ;
- d'un axe vertical gradué, l'**axe des ordonnées**.

Les deux axes sont perpendiculaires et se coupent en l'origine.

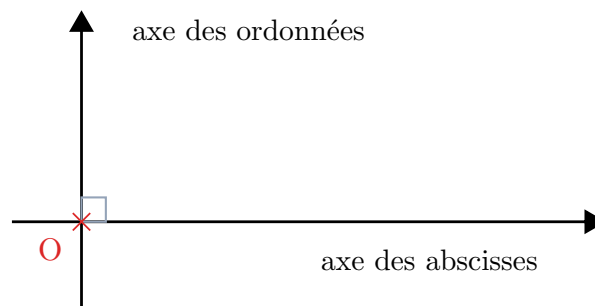


Fig. 7. – Les deux axes et leur origine commune : le plan est alors entièrement repéré.

Définition 4

À chaque point du plan muni d'un repère, on associe deux nombres, ses **coordonnées** : son **abscisse**, lue sur l'axe horizontal, puis son **ordonnée**, lue sur l'axe vertical.

Notation

Si le point A a pour abscisse 3 et pour ordonnée 2, on écrit $A(3 ; 2)$. L'abscisse s'écrit toujours en premier.

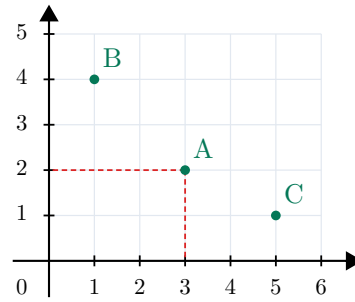


Fig. 8. – $A(3 ; 2)$, $B(1 ; 4)$ et $C(5 ; 1)$: les pointillés montrent comment se lisent les deux coordonnées d'un même point.

Méthode 3 — Lire les coordonnées d'un point

1. Descendre (ou monter) du point jusqu'à l'axe des abscisses en suivant la verticale : on lit l'abscisse.
2. Repartir du point vers l'axe des ordonnées en suivant l'horizontale : on lit l'ordonnée.

Méthode 4 — Placer un point de coordonnées données

1. Repérer l'abscisse sur l'axe horizontal, et tracer la verticale qui y passe.
2. Repérer l'ordonnée sur l'axe vertical, et tracer l'horizontale qui y passe.
3. Le point cherché est à l'intersection des deux traits.

Remarque

L'ordre compte : $A(3 ; 2)$ et $D(2 ; 3)$ sont deux points différents.

Chapitre 3

Nombres relatifs : découverte et comparaison

I - Nombres positifs, nombres négatifs

Pour mieux comprendre

Certaines grandeurs se mesurent des deux côtés d'une valeur de référence : une température au-dessus ou au-dessous de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, une altitude au-dessus ou au-dessous du niveau de la mer, une date avant ou après Jésus-Christ, un solde bancaire créditeur ou débiteur. Les nombres appris jusqu'ici ne permettent d'en écrire qu'une moitié.

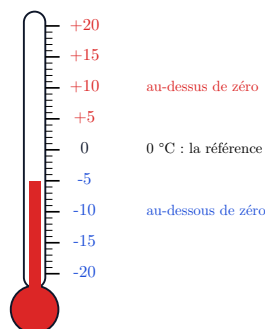


Fig. 9. – Sur un thermomètre, $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $+5\text{ }^{\circ}\text{C}$ sont à la même distance de 0, de part et d'autre.

Définitions

- Un nombre **positif** est un nombre supérieur ou égal à 0.
- Un nombre **négatif** est un nombre inférieur ou égal à 0.
- Un nombre est **strictement positif** s'il est positif et différent de 0, **strictement négatif** s'il est négatif et différent de 0.

Remarque

0 est à la fois positif et négatif : c'est le seul nombre dans ce cas.

Notation

Un nombre positif s'écrit avec un signe + devant, ou sans signe : +7 et 7 désignent le même nombre. Un nombre négatif s'écrit toujours avec un signe – devant : –7.

Définition 1

Un nombre **relatif** est un nombre positif ou négatif. Il s'écrit avec deux éléments :

- son **signe** : + ou – ;

- sa **valeur absolue** : un nombre positif ou nul.

Exemples

- Dans -123 , le signe est $-$ et la valeur absolue est 123.
- Pythagore est né vers l'an 580 avant J.-C. : -580 .
- Leonhard Euler est né en 1707 : $+1707$.
- La température de fusion du diazote est de $-210\text{ }^{\circ}\text{C}$.

II - Opposé et valeur absolue

Définition 2

L'**opposé** d'un nombre relatif est le nombre de même valeur absolue et de signe contraire.

Exemples

- L'opposé de $+5$ est -5 ; l'opposé de $-2,5$ est $+2,5$.
- L'opposé de 0 est 0.

Définition 3

La **valeur absolue** d'un nombre relatif est ce nombre « sans son signe » : c'est sa distance à 0 sur la droite graduée.

Exemples

- La valeur absolue de $+5$ est 5 ; celle de -7 est 7.
- -7 et $+7$ ont la même valeur absolue : ils sont opposés.

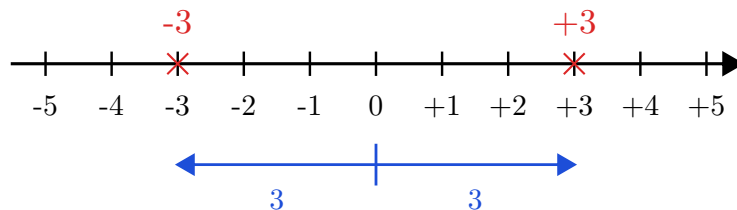


Fig. 10. – Deux nombres opposés sont à la même distance de l'origine, de part et d'autre : ils sont symétriques par rapport à 0.

III - Repérage sur une droite graduée

Définition 4

Sur une droite graduée, on place les nombres positifs à droite de l'origine et les nombres négatifs à gauche. L'**abscisse** d'un point est alors un nombre relatif.

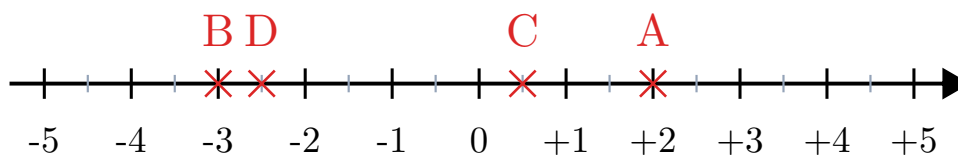


Fig. 11. – $A(2)$, $B(-3)$, $C(0,5)$ et $D(-2,5)$: le signe indique de quel côté de l'origine se trouve le point.

Méthode 1 — Placer un nombre relatif

1. Le signe donne le côté : à droite de 0 si le nombre est positif, à gauche s'il est négatif.
2. La valeur absolue donne la distance à l'origine, comptée en unités.

Remarque

Deux nombres opposés ont des points symétriques par rapport à l'origine.

IV - Comparer et ranger des nombres relatifs

Propriété 1

Sur une droite graduée orientée vers la droite, le plus grand de deux nombres est celui dont le point est le plus à **droite**.

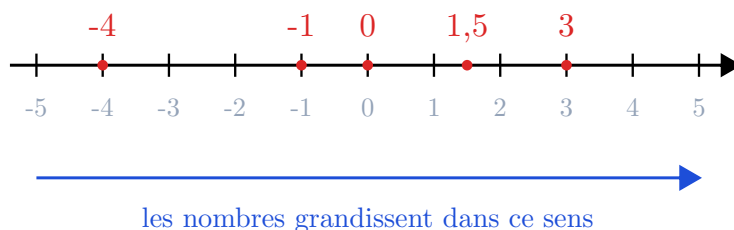


Fig. 12. – Comparer, c'est regarder qui est le plus à droite : $-4 < -1 < 0 < 1,5 < 3$.

Propriétés — Règles de comparaison

- Tout nombre positif est supérieur à tout nombre négatif.
- Entre deux nombres **positifs**, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue.
- Entre deux nombres **négatifs**, le plus grand est celui qui a la plus **petite** valeur absolue.

Exemples

- $3,2 > -100$: un positif est toujours plus grand qu'un négatif.
- $4,7 > 4,2$: deux positifs, on compare les valeurs absolues.
- $-2 > -9$: deux négatifs, et $2 < 9$; c'est bien -2 le plus grand.

Remarque

C'est là qu'on se trompe le plus souvent : -9 est plus « gros » que -2 par sa valeur absolue, mais il est plus **petit** comme nombre. Une dette de 9 € est pire qu'une dette de 2 €.

Méthode 2 — Ranger une liste de nombres relatifs

1. Séparer les nombres négatifs des nombres positifs.
2. Ranger les négatifs par valeurs absolues **décroissantes** : ils viennent en premier, du plus petit au plus grand.
3. Ranger ensuite les positifs par valeurs absolues croissantes.

Exemple

Ranger 3 ; $-2,5$; 0 ; -7 ; 1,5 dans l'ordre croissant :

$$-7 < -2,5 < 0 < 1,5 < 3.$$

Chapitre 4

Angles et parallélisme

I - Vocabulaire des angles

Définition 1

Deux angles sont **adjacents** s'ils ont le même sommet, un côté commun, et s'ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun. Leurs mesures s'ajoutent alors pour donner celle de l'angle qu'ils forment ensemble.

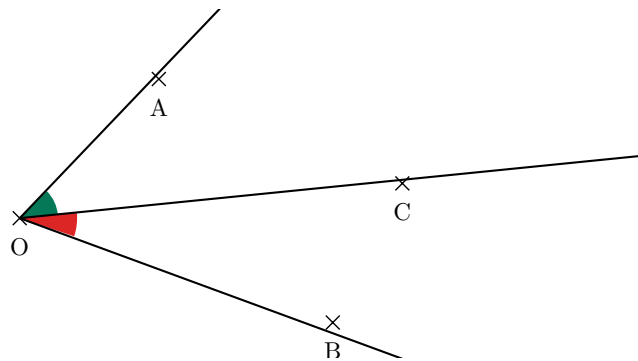


Fig. 13. – Les angles AOC et COB sont adjacents : ils partagent le côté $[OC)$.

Définitions

- Deux angles sont **complémentaires** si la somme de leurs mesures vaut 90° .
- Deux angles sont **supplémentaires** si la somme de leurs mesures vaut 180° .

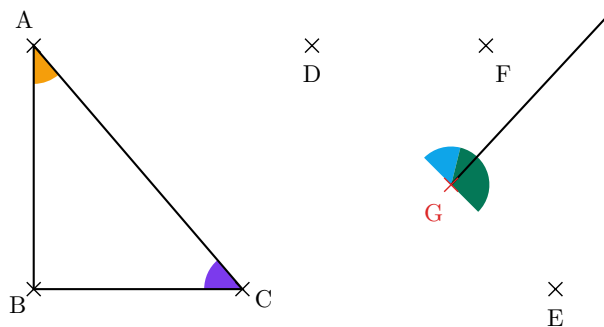


Fig. 14. – À gauche, deux angles complémentaires ; à droite, deux angles supplémentaires, ici adjacents et portés par une même droite.

Définition 2

Deux angles sont **opposés par le sommet** s'ils ont le même sommet et si leurs côtés se prolongent l'un l'autre.

Propriété 1

Deux angles opposés par le sommet ont la **même mesure**.

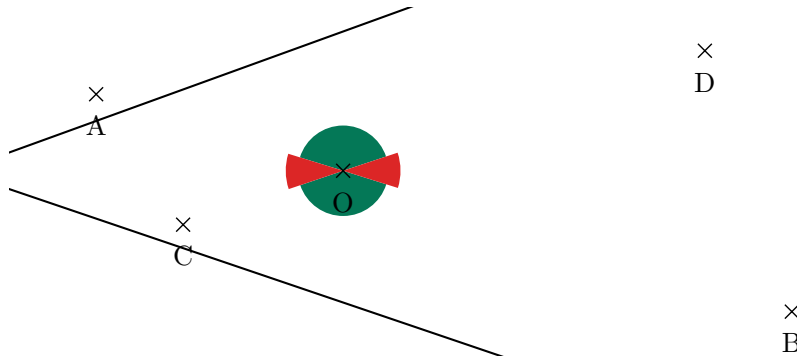


Fig. 15. – Deux droites sécantes forment quatre angles : ceux qui se font face sont égaux deux à deux.

II - Angles alternes-internes, angles correspondants

Lorsque deux droites (d) et (d') sont coupées par une troisième droite, appelée la **sécante**, huit angles apparaissent : quatre à chaque point d'intersection.

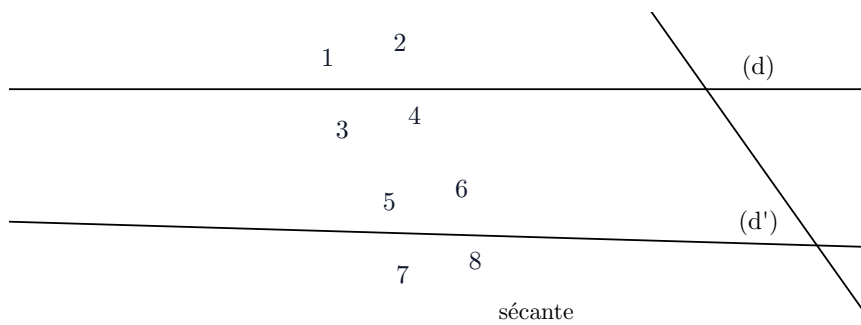


Fig. 16. – Les huit angles formés par deux droites et leur sécante. Les angles 3, 4, 5 et 6 sont dits *intérieurs* (entre les deux droites), les autres *extérieurs*.

Définition 3

Deux angles sont **alternes-internes** lorsque, dans cette figure :

- ils ont des sommets différents ;
- ils sont de part et d'autre de la sécante ;
- ils sont tous deux à l'intérieur des deux droites.

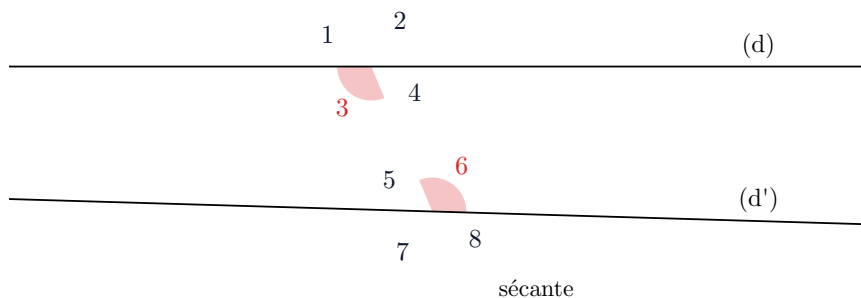


Fig. 17. – Les angles 3 et 6 sont alternes-internes ; 4 et 5 le sont aussi.

Définition 4

Deux angles sont **correspondants** lorsque :

- ils ont des sommets différents ;
- ils sont du même côté de la sécante ;
- l'un est à l'intérieur des deux droites, l'autre à l'extérieur.

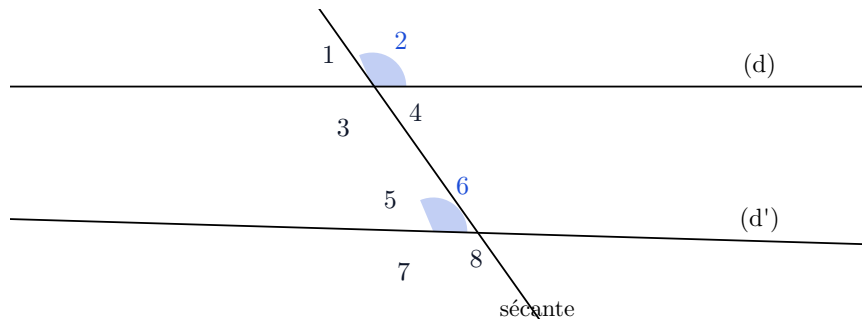


Fig. 18. – Les angles 2 et 6 sont correspondants. Il y a quatre paires de ce type : (1;5), (2;6), (3;7) et (4;8).

Remarque

Ces définitions ne parlent que de **position** : elles n'affirment rien sur les mesures. C'est le parallélisme qui, ensuite, rend ces angles égaux.

III - Caractérisation du parallélisme

Propriété 2

Si deux droites sont **parallèles**, alors les angles alternes-internes qu'elles forment avec une sécante ont la même mesure, et les angles correspondants aussi.

Propriété 3 — Réciproque

Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes égaux, ou deux angles correspondants égaux, alors ces deux droites sont **parallèles**.

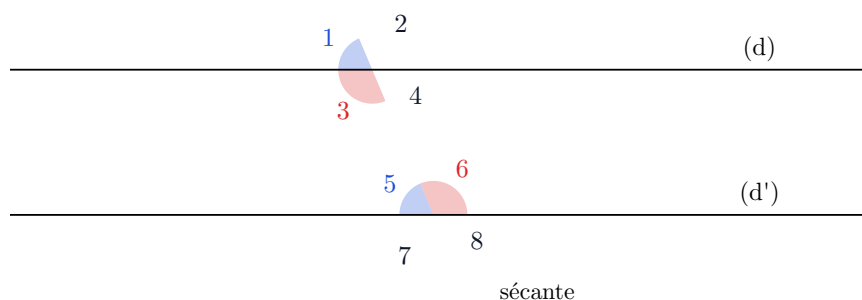


Fig. 19. – Les droites étant parallèles, les angles alternes-internes 3 et 6 sont égaux, et les angles correspondants 1 et 5 le sont aussi.

Méthode 1 — Démontrer que deux droites sont parallèles

1. Repérer la sécante, et les deux angles sur lesquels on travaille.
2. Justifier qu'ils sont alternes-internes, ou correspondants.
3. Vérifier qu'ils ont la même mesure.

4. Conclure par la réciproque : les deux droites sont parallèles.

Exemple

Deux droites sont coupées par une sécante ; les angles 3 et 6 mesurent chacun 57° . Ils sont alternes-internes et de même mesure : les deux droites sont donc parallèles.

Méthode 2 — Calculer une mesure d'angle

Quand les droites sont **déjà connues comme parallèles**, on enchaîne les trois outils : angles opposés par le sommet, angles supplémentaires (deux angles adjacents portés par une droite), et égalité des angles alternes-internes ou correspondants.

Exemple

Deux droites parallèles sont coupées par une sécante, et l'angle 1 mesure 110° .

- 2 mesure $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, car 1 et 2 sont supplémentaires.
- 4 mesure 110° , car 1 et 4 sont opposés par le sommet.
- 6 mesure 70° , car 2 et 6 sont correspondants.

Chapitre 5

Statistiques

I - Recueillir et organiser des données

Définitions

- Une **population** est l'ensemble des individus étudiés.
- Un **individu** est un élément de cette population.
- Un **caractère** est la grandeur ou la qualité observée sur chaque individu.

Exemple

- Population : les 30 élèves d'une classe de cinquième.
- Individu : chaque élève.
- Caractère : la note obtenue au dernier contrôle.

Vocabulaire

Un caractère est **quantitatif** quand ses valeurs sont des nombres (une note, une taille, un nombre de frères et sœurs), et **qualitatif** sinon (une couleur, un moyen de transport).

Méthode 1 — Organiser un recueil de données

1. Dire précisément quelle population est étudiée et quel caractère est observé.
2. Relever les valeurs une par une, sans en perdre : un trait par individu.
3. Regrouper les traits par valeur : on obtient un **tableau d'effectifs**.

Remarque

Une liste brute de 30 notes ne se lit pas. Le tableau d'effectifs dit la même chose, mais permet enfin de la comparer, de la représenter, de la résumer.

II - Effectifs et fréquences

Définitions

- L'**effectif** d'une valeur est le nombre d'individus qui portent cette valeur.
- L'**effectif total** est le nombre d'individus de la population.

Exemple

Les notes de la classe, regroupées :

Note	8	10	12	14	16	18	Total
Effectif	3	7	8	6	4	2	30

Définition 1

La **fréquence** d'une valeur est le quotient de son effectif par l'effectif total :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}.$$

Méthode 2 — Exprimer une fréquence

- En **fraction** : on écrit le quotient tel quel, par exemple $\frac{3}{30}$.
- En **décimal** : on effectue la division, ici 0,1.
- En **pourcentage** : on multiplie le résultat décimal par 100, ici 10%.

Exemple

Note	8	10	12	14	16	18	Total
Effectif	3	7	8	6	4	2	30
Fréquence	$\frac{3}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$	1
En %	10	23,3	26,7	20	13,3	6,7	100

Propriété 1

La somme de toutes les fréquences d'une série vaut 1, c'est-à-dire 100%. C'est un bon contrôle : si la somme ne tombe pas juste, un effectif a été mal compté.

Remarque

Les fréquences permettent de comparer deux populations de tailles différentes : 8 élèves sur 30 et 12 élèves sur 45 représentent la même proportion, environ 27%.

III - Tableaux, diagrammes et graphiques

Définition 2

Un **diagramme en barres** représente chaque valeur par une barre dont la hauteur est proportionnelle à son effectif.

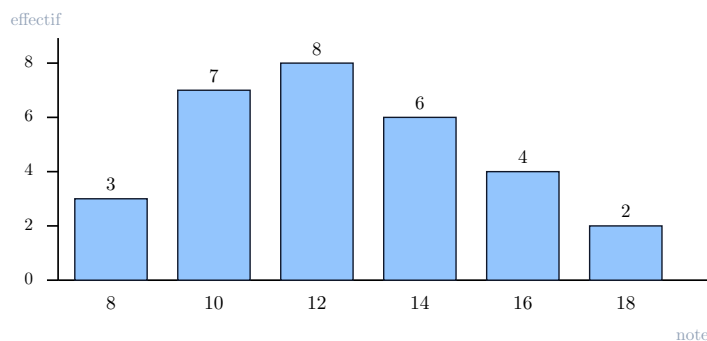


Fig. 20. – Les effectifs des notes de la classe : la hauteur se lit sur l'axe vertical.

Définition 3

Un **diagramme circulaire** représente la série sur un disque : le disque entier (360°) correspond à l'effectif total, et chaque valeur reçoit un secteur proportionnel à son effectif.

Méthode 3 — Construire un diagramme circulaire

1. Calculer l'effectif total.
2. Pour chaque valeur, calculer son angle :

$$\text{angle} = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}} \times 360^\circ.$$

3. Tracer un rayon, puis reporter les angles au rapporteur, l'un après l'autre, toujours dans le même sens.
4. Vérifier que la somme des angles fait bien 360° .

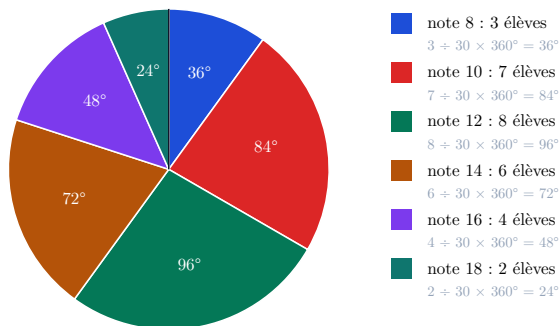


Fig. 21. — Chaque secteur porte l'angle qui a servi à le tracer : $\frac{3}{30} \times 360^\circ = 36^\circ$ pour la note 8, et ainsi de suite.

Définition 4

Un **graphique cartésien** représente une série dans un repère : le caractère lu en abscisse, la valeur observée en ordonnée. Les points peuvent être reliés lorsque l'ordre des abscisses a un sens, comme le temps.

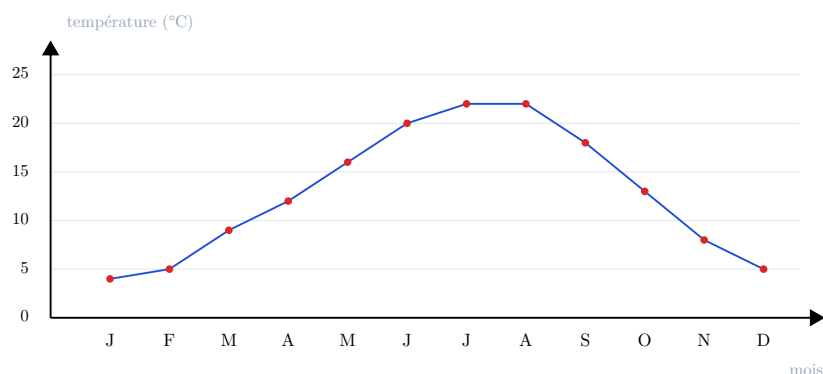


Fig. 22. — Températures moyennes mois par mois : le graphique montre l'évolution, ce que le tableau seul ne donne pas à voir.

Méthode 4 — Choisir une représentation

- Un **diagramme en barres** compare des effectifs entre eux.

- Un **diagramme circulaire** montre la part de chaque valeur dans le tout.
- Un **graphique cartésien** met en évidence une évolution.

Protocole — Avec un tableur-grapheur

1. Saisir les valeurs du caractère dans une colonne, les effectifs dans la colonne voisine.
2. Sélectionner les deux colonnes, puis demander l'insertion d'un diagramme.
3. Choisir le type de diagramme adapté à ce qu'on veut montrer.
4. Nommer les axes et le graphique : un diagramme sans légende ne se lit pas.

IV - Moyenne d'une série

Définition 5

La **moyenne** d'une série de données est la somme de toutes les valeurs, divisée par l'effectif total. On la note souvent $\bar{x}$.

Formule

$$\bar{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{effectif total}}$$

Méthode 5 — Calculer une moyenne

1. Additionner toutes les valeurs, en comptant chaque valeur autant de fois que son effectif.
2. Diviser par l'effectif total.
3. Arrondir si nécessaire, en précisant l'arrondi choisi.

Exemples

- Notes de cinq élèves : 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16.

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 12 + 14 + 16}{5} = \frac{60}{5} = 12.$$

- Avec le tableau d'effectifs de la classe entière :

$$\bar{x} = \frac{8 \times 3 + 10 \times 7 + 12 \times 8 + 14 \times 6 + 16 \times 4 + 18 \times 2}{30} = \frac{356}{30} \approx 11,9.$$

Remarque

La moyenne n'est pas forcément une valeur du caractère : ici, 11,9 n'est la note d'aucun élève. C'est la valeur qu'auraient tous les élèves si on répartissait équitablement les points entre eux.

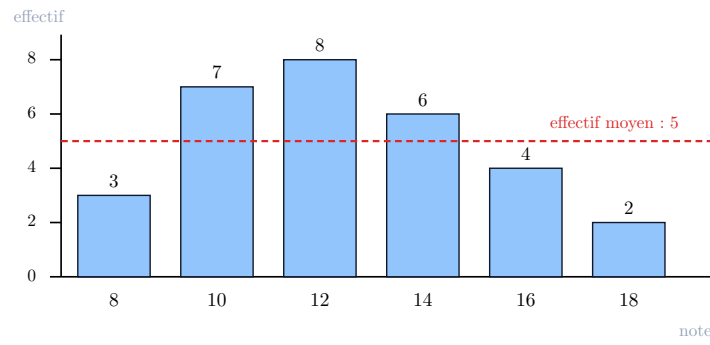


Fig. 23. – Ramener toutes les barres à la même hauteur, c'est prendre la moyenne des effectifs :
ici 5 élèves par note.

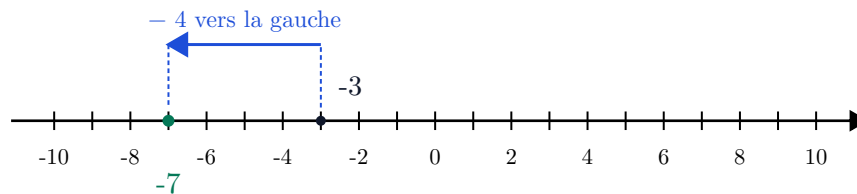
Chapitre 6

Addition et soustraction de nombres relatifs

I - Additionner deux nombres relatifs

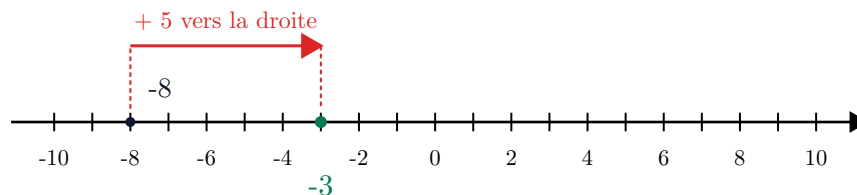
Pour mieux comprendre

Ajouter un nombre relatif, c'est se déplacer sur la droite graduée : vers la **droite** si le nombre est positif, vers la **gauche** s'il est négatif. Le résultat est le point d'arrivée.



$$(-3) + (-4) = -7$$

Fig. 24. – $(-3) + (-4)$: on part de -3 , on recule de 4, on arrive à -7 .



$$(-8) + (+5) = -3$$

Fig. 25. – $(-8) + (+5)$: on part de -8 , on avance de 5, on arrive à -3 .

Méthode 1 — Additionner deux nombres relatifs

- S'ils sont de **même signe** : la somme garde ce signe, et on **additionne** les valeurs absolues.
- S'ils sont de **signes contraires** : la somme prend le signe du terme de plus grande valeur absolue, et on **soustrait** les valeurs absolues.

Exemples

- $(-7) + (-9) = -16$: même signe, $7 + 9 = 16$.
- $(-8) + (+5) = -3$: signes contraires, $8 - 5 = 3$, et -8 l'emporte.
- $(+12) + (-4) = +8$: signes contraires, $12 - 4 = 8$, et $+12$ l'emporte.

Propriété 1

La somme de deux nombres **opposés** est nulle : $(-6) + (+6) = 0$.

Remarque

L'ordre des termes ne change pas la somme : $(-8) + (+5) = (+5) + (-8)$. On peut donc regrouper les termes comme on veut.

II - Additionner plusieurs nombres relatifs**Méthode 2 — Somme de plusieurs relatifs**

1. Regrouper d'un côté tous les termes positifs, de l'autre tous les termes négatifs.
2. Additionner chaque groupe séparément.
3. Additionner les deux résultats obtenus, qui sont de signes contraires.

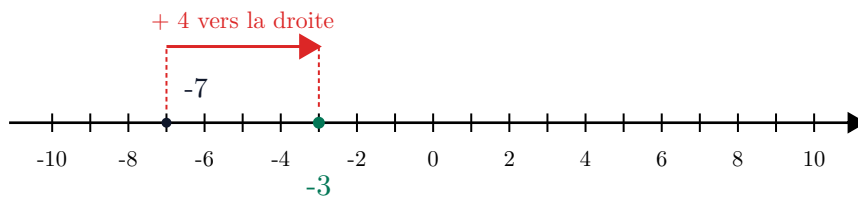
Exemple

$$\begin{aligned} (-5) + (+8) + (-3) + (+2) &= [(+8) + (+2)] + [(-5) + (-3)] \\ &= (+10) + (-8) \\ &= +2. \end{aligned}$$

III - Soustraire un nombre relatif**Propriété 2**

Soustraire un nombre, c'est **ajouter son opposé** :

$$a - b = a + (-b).$$



$$(-7) - (-4) = (-7) + (+4) = -3$$

Fig. 26. - $(-7) - (-4)$: soustraire -4 , c'est ajouter $+4$, donc avancer de 4.

Méthode 3 — Calculer une différence

1. Transformer la soustraction en addition, en remplaçant le nombre soustrait par son opposé.
2. Appliquer alors la règle d'addition des relatifs.

Exemples

- $(-7) - (-4) = (-7) + (+4) = -3$.
- $(+4) - (+7) = (+4) + (-7) = -3$.
- $(-2) - (+9) = (-2) + (-9) = -11$.

Remarque

Le signe $-$ a donc deux rôles : il marque le **signe** d'un nombre (-4) , et il marque l'**opération** de soustraction $(7 - 4)$. C'est la place qu'il occupe dans l'écriture qui les distingue.

IV - Parenthèses et simplification d'écriture

Convention

On n'écrit jamais deux signes d'opération à la suite : $3 + -5$ ne se note pas. C'est pour cela qu'on écrit $3 + (-5)$, avec des parenthèses.

Propriété 3 — Simplifier une écriture

Une somme de relatifs s'écrit sans parenthèses en appliquant deux règles :

- $+(+a)$ et $-(-a)$ s'écrivent $+a$;
- $+(-a)$ et $-(+a)$ s'écrivent $-a$.

Autrement dit, deux signes identiques donnent un $+$, deux signes différents donnent un $-$.

Exemples

- $(+7) + (-3) - (-5) = 7 - 3 + 5 = 9$.
- $(-4) - (+6) + (-2) = -4 - 6 - 2 = -12$.
- $(-4) - (-9) = -4 + 9 = 5$.

Remarque

Les parenthèses restent **indispensables** quand elles changent l'ordre des calculs : $8 - (3 + 5) = 0$, alors que $8 - 3 + 5 = 10$. Les supprimer n'est légitime que dans une somme de relatifs, où l'ordre est libre.

V - Enchainements et problèmes

Méthode 4 — Enchaîner additions et soustractions

1. Écrire toutes les soustractions comme des additions.
2. Supprimer les parenthèses inutiles.
3. Regrouper les positifs entre eux, les négatifs entre eux, puis conclure.

Exemple

$$\begin{aligned} (-6) + (+4) - (-3) - (+8) &= -6 + 4 + 3 - 8 \\ &= (4 + 3) - (6 + 8) \\ &= 7 - 14 = -7. \end{aligned}$$

Exemple — Un relevé de température

À 6 h, il fait -4 °C. La température monte de 9 degrés dans la journée, puis redescend de 6 degrés dans la nuit.

$$-4 + 9 - 6 = 5 - 6 = -1.$$

Il fait donc $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$ à la fin de la nuit.

Exemple — Un compte bancaire

Un compte affiche $-35,5\text{ €}$. Un virement de 120 € arrive, puis un prélèvement de 62 € est effectué.

$$-35,5 + 120 - 62 = 84,5 - 62 = 22,5.$$

Le solde final est de $22,5\text{ €}$.

Exemple — Des altitudes

Un plongeur descend à -18 m , puis remonte de 7 m .

$$-18 + 7 = -11$$

: il se trouve à -11 m . L'écart entre le fond du lac, à -24 m , et sa position est $-11 - (-24) = -11 + 24 = 13\text{ m}$.

Chapitre 7

Triangles

I - Somme des angles d'un triangle

Propriété 1

Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180° .

Démonstration

Soit un triangle ABC . On trace la parallèle à (BC) passant par A .

On sait que

Cette parallèle et la droite (AB) sont coupées par la sécante (AB) : l'angle $\widehat{ABC}$ et l'angle qu'il forme en A , du côté gauche, sont alternes-internes.

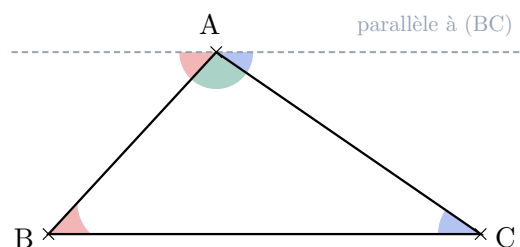
Or

Deux angles alternes-internes déterminés par deux droites parallèles ont la même mesure.

Donc

L'angle de gauche en A a pour mesure $\widehat{ABC}$. Le même raisonnement avec (AC) montre que l'angle de droite en A a pour mesure $\widehat{ACB}$.

Les trois angles se retrouvent alors mis bout à bout en A , le long d'une droite : leur somme est celle d'un angle plat, soit 180° .



les trois angles mis bout à bout en A forment un angle plat : 180°

Fig. 27. – Les angles de même couleur sont alternes-internes, donc de même mesure.

Méthode 1 — Calculer la mesure d'un angle

Quand deux angles d'un triangle sont connus, le troisième s'obtient en soustrayant leur somme à 180° .

Exemples

- Dans ABC , si $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et $\widehat{ACB} = 40^\circ$, alors $\widehat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.
- Dans DEF , si $\widehat{DEF} = 90^\circ$ et $\widehat{DFE} = 30^\circ$, alors $\widehat{EDF} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Propriété 2 — Conséquences

- Dans un **triangle rectangle**, les deux angles aigus sont complémentaires : leur somme vaut 90° .
- Dans un **triangle isocèle**, les deux angles de la base sont égaux ; connaître l'angle au sommet suffit donc à tout connaître.
- Dans un **triangle équilatéral**, les trois angles sont égaux, et valent chacun $180^\circ \div 3 = 60^\circ$.

Exemple

Un triangle isocèle a un angle au sommet de 40° . Les deux angles de la base se partagent $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$, et sont égaux : chacun mesure $140^\circ \div 2 = 70^\circ$.

Remarque

Un triangle ne peut pas avoir deux angles droits, ni deux angles obtus : la somme dépasserait déjà 180° .

II - Construire un triangle à partir de données partielles

Propriété 3 — Inégalité triangulaire

Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres. Trois longueurs données ne définissent donc un triangle que si la plus grande est inférieure à la somme des deux autres.

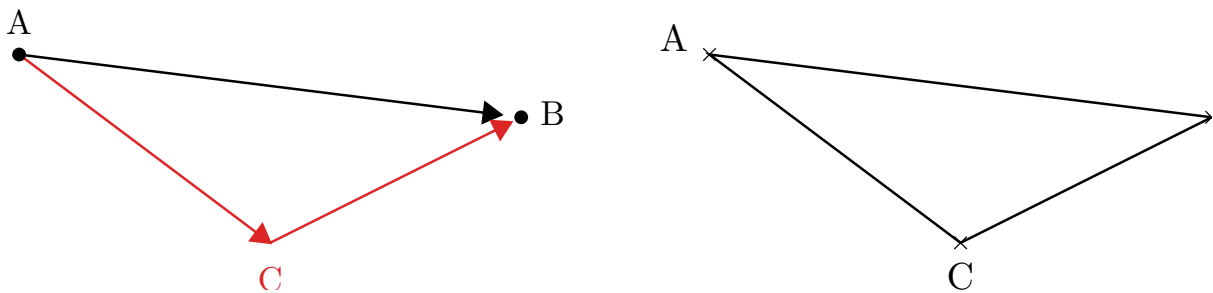


Fig. 28. – Le chemin direct est toujours plus court que le détour par le troisième sommet.

Protocole — Trois longueurs

1. Tracer le côté le plus long.
2. Tracer un arc de cercle de centre l'une des extrémités, de rayon la deuxième longueur.
3. Tracer un arc de cercle de centre l'autre extrémité, de rayon la troisième longueur.
4. Relier le point d'intersection des deux arcs aux deux extrémités.

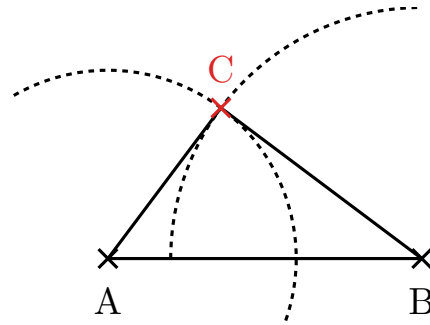


Fig. 29. – Le troisième sommet n'est pas choisi : il est imposé par le croisement des deux arcs.

Protocole — Deux longueurs et l'angle entre elles

1. Tracer l'un des deux côtés.
2. Au rapporteur, tracer une demi-droite formant l'angle donné.
3. Reporter la seconde longueur sur cette demi-droite : le troisième sommet y est.

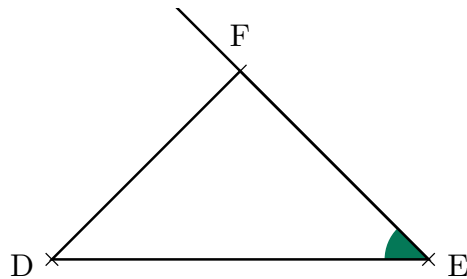


Fig. 30. – L'angle donne la direction ; la longueur donne le point.

Protocole — Une longueur et deux angles

1. Tracer le côté donné.
2. À chaque extrémité, tracer au rapporteur la demi-droite formant l'angle demandé.
3. Le troisième sommet est le point d'intersection des deux demi-droites.

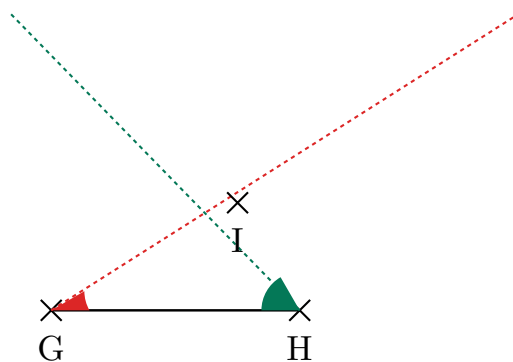


Fig. 31. – Les deux demi-droites se coupent en un seul point : le triangle est déterminé.

Méthode 2 — Quand une donnée manque

Les données sont parfois incomplètes en apparence : la somme des angles, le codage d'un triangle isocèle ou équilatéral, l'inégalité triangulaire permettent souvent de retrouver la donnée manquante avant de construire.

Exemple

Construire RST tel que $RS = 5$ cm, $\widehat{RST} = 50^\circ$ et $\widehat{STR} = 70^\circ$. L'angle en R n'est pas donné, mais

$$\widehat{SRT} = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ,$$

et on est ramené au cas « une longueur et deux angles ».

Remarque

Certaines données ne définissent **aucun** triangle (2 cm, 3 cm, 7 cm : $7 > 2 + 3$), d'autres en définissent une infinité (trois angles seuls, sans aucune longueur).

III - Médiatrices et cercle circonscrit

Définition 1

La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu. C'est l'ensemble des points situés à égale distance des deux extrémités.

Propriété 4

Les trois médiatrices d'un triangle sont **concurrentes** : elles se coupent en un même point, qui est le centre du **cercle circonscrit** au triangle, c'est-à-dire du cercle passant par les trois sommets.

Démonstration

Soit O le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$.

On sait que

O est sur la médiatrice de $[AB]$, donc $OA = OB$.

Or

O est aussi sur la médiatrice de $[BC]$, donc $OB = OC$.

Donc

$OA = OB = OC$: le point O est à égale distance de A et de C , il appartient donc aussi à la médiatrice de $[AC]$. Le cercle de centre O et de rayon OA passe par les trois sommets.

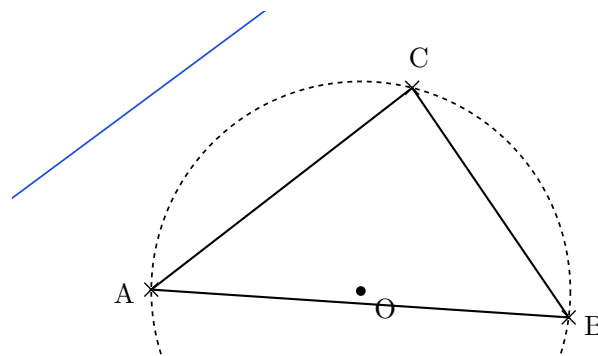
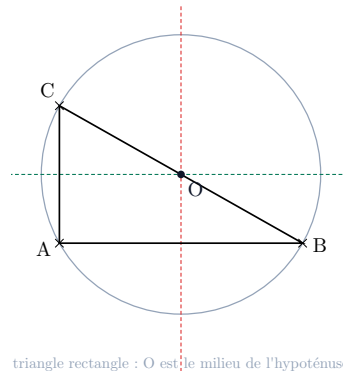
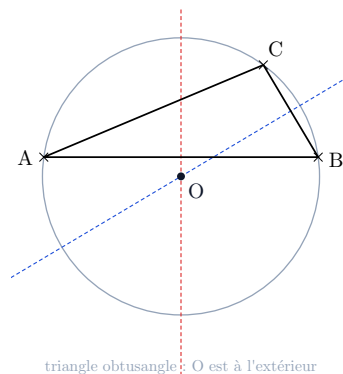


Fig. 32. – Les trois médiatrices se coupent en O , centre du cercle circonscrit.

Propriété 5 — Cas particuliers

- Dans un triangle **rectangle**, le centre du cercle circonscrit est le **milieu de l'hypoténuse** : l'hypoténuse est un diamètre.
- Dans un triangle **isocèle**, le centre est sur l'axe de symétrie, c'est-à-dire sur la médiatrice de la base.
- Dans un triangle **obtusangle**, le centre est à l'**extérieur** du triangle.

Fig. 33. – Triangle rectangle : O est le milieu de l'hypoténuse.Fig. 34. – Triangle obtusangle : O sort du triangle, mais le cercle passe toujours par les trois sommets.**IV - Hauteurs et aire d'un triangle****Définition 2**

La **hauteur** issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé. Le point où elle rencontre ce côté s'appelle le **pied** de la hauteur.

Notation

Si H est le pied de la hauteur issue de A , on dit indifféremment que (AH) est la hauteur issue de A , la hauteur relative à $[BC]$, ou la hauteur du côté $[BC]$.

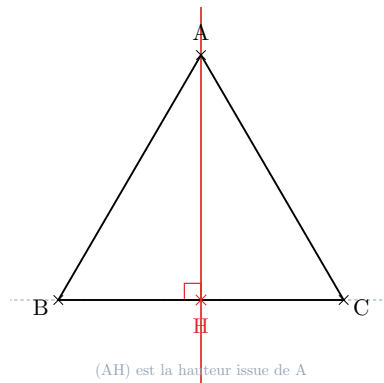


Fig. 35. – La hauteur issue de A rencontre (BC) à angle droit, en H .

Propriété 6

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : leur point commun s'appelle l'**orthocentre**.

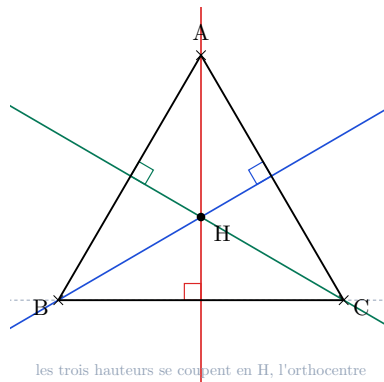


Fig. 36. – Les trois hauteurs se coupent en H .

Remarque

Dans un triangle obtusangle, le pied d'une hauteur peut tomber en dehors du côté — il faut alors prolonger ce côté — et l'orthocentre sort du triangle.

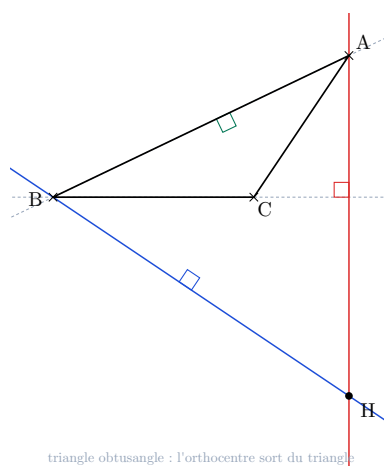


Fig. 37. – Triangle obtusangle : les hauteurs se coupent toujours, mais à l'extérieur.

Formule

$$\text{aire d'un triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

où la hauteur est celle qui est relative à la base choisie.

Pour mieux comprendre

Un triangle est la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur : la hauteur partage ce rectangle en deux, et chaque part est coupée en deux parts égales par un côté du triangle.

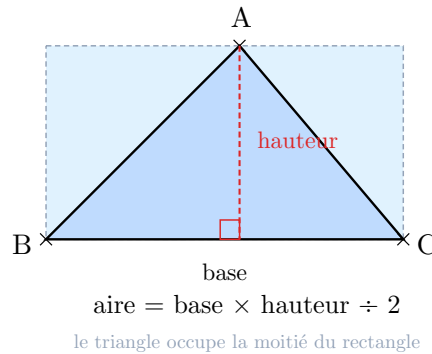


Fig. 38. – L'aire du triangle est la moitié de celle du rectangle.

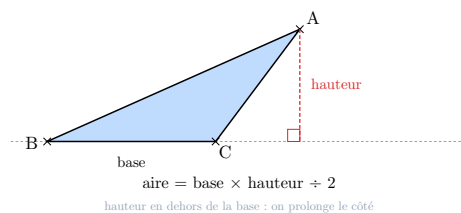


Fig. 39. – La formule vaut encore quand la hauteur tombe en dehors de la base.

Exemple

Un triangle a une base de 7,5 cm et une hauteur relative de 4 cm :

$$\mathcal{A} = \frac{7,5 \times 4}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}^2.$$

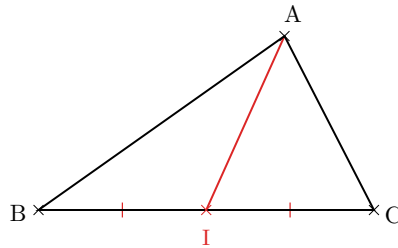
Remarque

Les trois couples base-hauteur d'un même triangle donnent la même aire : c'est un bon moyen de retrouver une hauteur quand on connaît l'aire et une base.

V - Médianes et partage des aires

Définition 3

La **médiane** issue d'un sommet est le segment qui joint ce sommet au **milieu** du côté opposé.

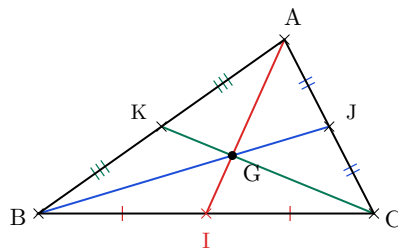


(AI) est la médiane issue de A : I est le milieu de [BC]

Fig. 40. – I est le milieu de [BC] : [AI] est la médiane issue de A.

Propriété 7

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes : leur point commun s'appelle le **centre de gravité** du triangle.



les trois médianes se coupent en G, le centre de gravité

Fig. 41. – Les trois médianes se coupent en G.

Propriété 8

Une médiane partage le triangle en deux triangles de **même aire**.

Démonstration

Soit [AI] la médiane issue de A dans le triangle ABC.

On sait que

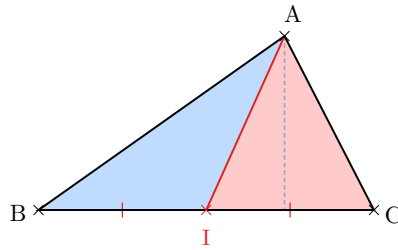
Les triangles ABI et AIC ont des bases [BI] et [IC] de même longueur, puisque I est le milieu de [BC].

Or

Ces deux bases sont portées par la même droite (BC), et les deux triangles ont le même sommet A : la hauteur issue de A est la même pour les deux.

Donc

Leurs aires, égales à $\text{base} \times \text{hauteur} \div 2$, sont égales.



une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire

Fig. 42. – Même base, même hauteur : les deux triangles ont la même aire.

Exemple

Un triangle d'aire 24 cm^2 est partagé par une médiane en deux triangles de 12 cm^2 chacun.
Les trois médianes le partagent finalement en six triangles de même aire, 4 cm^2 chacun.

Chapitre 8

Proportionnalité

I - Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition 1

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si on passe des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre en multipliant toujours par un **même** nombre.

Exemples

- Le côté d'un carré et son périmètre sont proportionnels : on multiplie toujours par 4.
- Le nombre d'articles identiques achetés et le prix payé sont proportionnels : on multiplie par le prix d'un article.
- La durée d'un trajet à vitesse constante et la distance parcourue sont proportionnelles.

Exemples — Contre-exemples

- L'âge d'une personne et sa taille ne sont **pas** proportionnels : à 20 ans, on ne mesure pas le double de sa taille à 10 ans.
- Le côté d'un carré et son aire ne sont **pas** proportionnels : en doublant le côté, l'aire est multipliée par 4.
- Un abonnement à 10 € par mois plus 2 € par séance n'est **pas** proportionnel au nombre de séances : sans séance, on paie déjà 10 €.

Méthode 1 — Vérifier une proportionnalité dans un tableau

1. Calculer, pour chaque colonne, le quotient de la valeur du bas par la valeur du haut.
2. Si tous ces quotients sont égaux, les grandeurs sont proportionnelles, et ce quotient commun est le coefficient.
3. S'il en existe deux différents, elles ne le sont pas — un seul suffit à conclure.

Exemple

Nombre de pommes	2	5	10
Prix (€)	1,6	4	8

$$\frac{1,6}{2} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Les quotients sont tous égaux : il y a proportionnalité.

Exemple

Âge (ans)	2	10	20
Taille (cm)	85	140	175

$$\frac{85}{2} = 42,5$$

mais

$$\frac{140}{10} = 14.$$

Les quotients diffèrent : il n'y a pas proportionnalité.

II - Coefficient de proportionnalité

Définition 2

Le nombre par lequel on multiplie s'appelle le **coefficient de proportionnalité**. Il se lit d'une ligne du tableau à l'autre.

Masse (kg)	1	4	7
Prix (€)	3	12	21

Fig. 43. – Le coefficient 3 fait passer de la masse au prix, colonne par colonne.

Méthode 2 — Quatre façons de compléter un tableau

- **Coefficient** : multiplier une ligne entière par le coefficient.
- **Homogénéité** : multiplier (ou diviser) une colonne entière par un même nombre.
- **Additivité** : additionner deux colonnes pour en obtenir une troisième.
- **Passage à l'unité** : obtenir d'abord la colonne du 1, puis multiplier par ce qu'on veut.

Exemple

6 kg de pommes coûtent 18 €. Combien coûtent 4 kg ?

Masse (kg)	6	1	4
Prix (€)	18	3	12

Passage à l'unité : $18 \div 6 = 3$ € le kilogramme, puis $3 \times 4 = 12$ €.

Exemple — Vitesse moyenne

Une voiture parcourt 180 km en 2 h. Le coefficient de proportionnalité, ici $180 \div 2 = 90$, est sa **vitesse moyenne**, en kilomètres par heure. En 5 h, elle parcourt $90 \times 5 = 450$ km.

Exemple — Échelle

Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{25000}$, 1 cm représente 25000 cm, soit 250 m. Une distance de 6 cm sur la carte correspond donc à $6 \times 250 = 1500$ m.

Remarque

Un coefficient de proportionnalité a presque toujours un **sens concret** : prix unitaire, vitesse, échelle, masse volumique. Le nommer, c'est déjà comprendre la situation.

III - Proportions et pourcentages**Définition 3**

Une **proportion** est le quotient d'une partie par le tout. Un **pourcentage** est une proportion écrite avec le dénominateur 100 : $t\%$ signifie $\frac{t}{100}$.

Méthode 3 — Appliquer un pourcentage

Prendre $t\%$ d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemple

$$25\% \text{ de } 50 \text{ €} = \frac{25}{100} \times 50 = 12,5 \text{ €}.$$

Méthode 4 — Calculer un pourcentage

Pour savoir quel pourcentage une partie représente d'un tout, on calcule

$$\frac{\text{partie}}{\text{tout}} \times 100.$$

Exemple

Un article passe de 80 € à 50 €. La remise est de $80 - 50 = 30$ €, soit

$$\frac{30}{80} \times 100 = 37,5 \text{ \%}.$$

Le prix a diminué de 37,5 %.

Méthode 5 — Retrouver le prix de départ

Une diminution de 30% laisse 70% du prix : le tableau de proportionnalité relie le prix et le pourcentage correspondant.

Exemple

Après une baisse de 30%, un article coûte 42 €.

Prix (€)	?	42
Pourcentage (%)	100	70

On passe de la première colonne à la seconde en multipliant par $\frac{70}{100}$; dans l'autre sens on divise :

$$42 \div \frac{70}{100} = 42 \times \frac{100}{70} = 60.$$

Le prix de départ était de 60 €.

Remarque

Deux baisses successives ne s'additionnent pas : -20% puis -10% ne font pas -30% , car la seconde baisse porte sur un prix déjà diminué.

IV - Représenter une situation de proportionnalité

Notation

Un tableau de proportionnalité indique toujours les grandeurs et leurs unités : des nombres seuls, sans signification, ne se comparent pas.

Propriété 1 — Caractérisation graphique

Dans un repère, une situation de proportionnalité se reconnaît à ceci : les points sont **alignés avec l'origine** du repère.

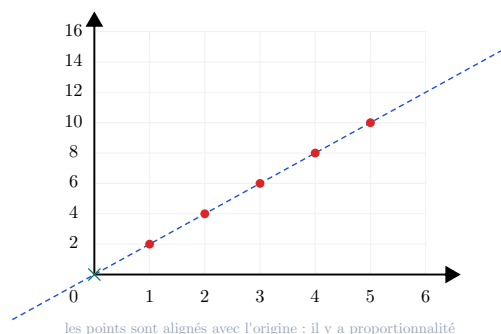


Fig. 44. – Les points sont alignés et la droite passe par l'origine : proportionnalité.

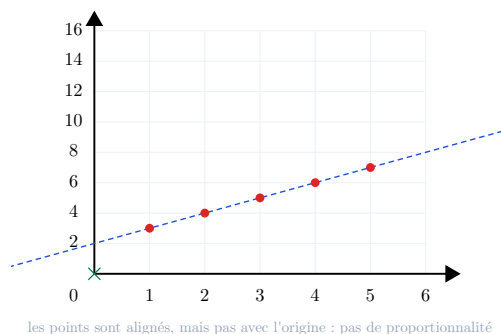


Fig. 45. – Alignés, mais la droite ne passe pas par l'origine : ce n'est pas de la proportionnalité.

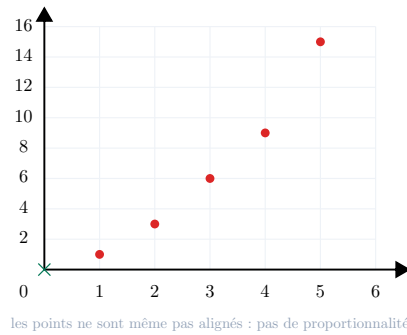


Fig. 46. – Points non alignés : il n’y a pas non plus proportionnalité.

Méthode 6 — Lire un nuage de points

1. Vérifier si les points sont alignés.
2. S'ils le sont, prolonger la droite jusqu'à l'axe vertical : passe-t-elle par l'origine ?
3. Les deux conditions ensemble, et elles seules, caractérisent la proportionnalité.

Remarque

L'origine se justifie par le sens : 0 article acheté coûte 0 €. Toute situation où « rien » coûte déjà quelque chose n'est pas proportionnelle.

Chapitre 9

Fractions

I - Fraction et quotient

Définition 1

Soient deux nombres a et b , avec $b \neq 0$. Le **quotient** de a par b est le nombre qui, multiplié par b , donne a .

Notation

Ce quotient se note $\frac{a}{b}$: a est le **numérateur**, b le **dénominateur**.

Propriété 1

$$\frac{a}{b} \times b = a.$$

Exemples

- $\frac{7}{3}$ est le quotient de 7 par 3, et $\frac{7}{3} \times 3 = 7$.
- $\frac{17}{6}$ est le quotient de 17 par 6, et $\frac{17}{6} \times 6 = 17$.

Remarque

Un quotient n'est pas toujours un nombre décimal : $7 \div 3 = 2,333\dots$ ne s'arrête pas. L'écriture fractionnaire $\frac{7}{3}$, elle, est **exacte** : c'est une raison de la préférer.

II - Égalité de fractions

Définition 2

Deux fractions sont **égales** lorsqu'elles représentent le même quotient.

Propriété 2

Un quotient ne change pas si on multiplie — ou si on divise — son numérateur **et** son dénominateur par un même nombre non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}.$$

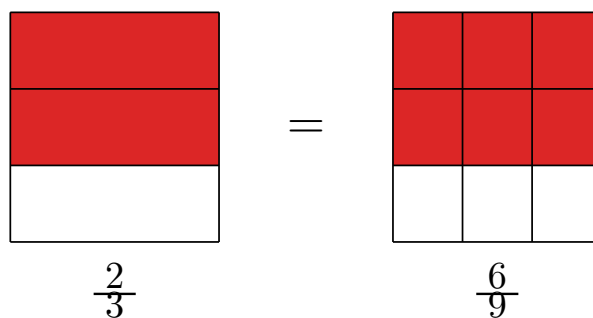


Fig. 47. – La même part du rectangle, découpée deux fois plus finement : l'aire coloriée ne change pas.

Exemples

- $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$.
- $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$.

Définition 3

Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même facteur commun. Une fraction est **irréductible** quand on ne peut plus la simplifier.

Méthode 1 — Simplifier une fraction

1. Chercher un diviseur commun au numérateur et au dénominateur — les critères de divisibilité aident.
2. Diviser les deux par ce nombre.
3. Recommencer tant qu'un diviseur commun subsiste.

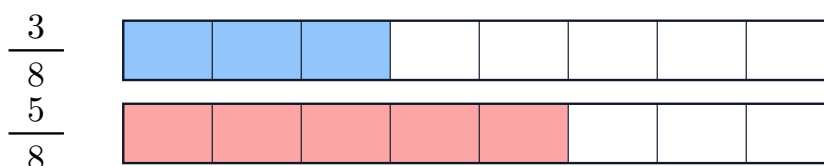
Exemples

- $\frac{6}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}$.
- $\frac{121}{176} = \frac{11 \times 11}{16 \times 11} = \frac{11}{16}$.
- $\frac{540}{720} = \frac{3}{4}$, en simplifiant successivement par 10, par 2, puis par 9.

III - Comparer des fractions

Propriété 3 — Même dénominateur

Deux fractions de même dénominateur se comparent par leurs numérateurs : la plus grande est celle dont le numérateur est le plus grand.

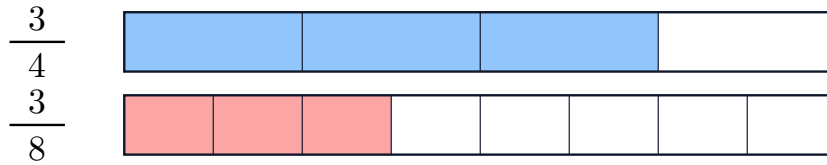


même dénominateur : la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur

Fig. 48. – $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$: les parts sont de la même taille, il y en a simplement plus.

Propriété 4 — Même numérateur

Deux fractions de même numérateur se comparent par leurs dénominateurs : la plus grande est celle dont le dénominateur est le plus **petit**, car ses parts sont plus grandes.



même numérateur : plus le dénominateur est grand, plus les parts sont petites

Fig. 49. – $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$: autant de parts, mais des parts plus petites.

Méthode 2 — Comparer deux fractions quelconques

1. Réécrire les deux fractions avec un même dénominateur, en choisissant de préférence un multiple commun des deux dénominateurs.
2. Comparer alors les numérateurs.

Exemple

Comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{8}$. Un dénominateur commun est 24 :

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24} \quad \text{et} \quad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}.$$

Comme $16 > 15$, on a $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$.

Propriété 5 — Comparer à 1

Une fraction est plus petite que 1 si son numérateur est plus petit que son dénominateur, égale à 1 s'ils sont égaux, plus grande que 1 sinon.

Exemples

- $\frac{7}{9} < 1$, car $7 < 9$.
- $\frac{12}{12} = 1$.
- $\frac{11}{4} > 1$, car $11 > 4$.

IV - Additionner et soustraire des fractions**Propriété 6**

Deux fractions de **même dénominateur** s'additionnent (ou se soustraient) en additionnant (ou soustrayant) les numérateurs, sans toucher au dénominateur :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}.$$

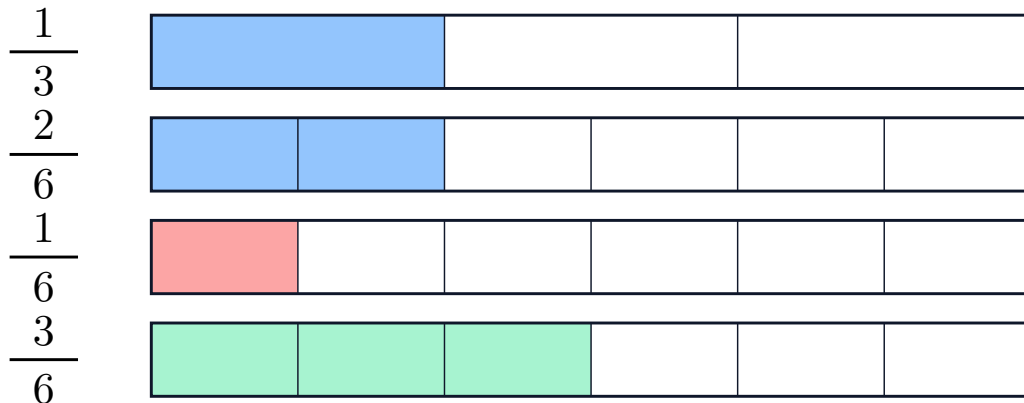
Exemples

- $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.
- $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$.

- $\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

Méthode 3 — Dénominateurs différents

1. Chercher un dénominateur commun : souvent, l'un des deux dénominateurs est déjà un multiple de l'autre.
2. Réécrire chaque fraction avec ce dénominateur.
3. Additionner ou soustraire les numérateurs, puis simplifier le résultat.



$\frac{1}{3}$ se réécrit $\frac{2}{6}$: les deux bandes se découpent alors pareil

Fig. 50. — $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$: on réécrit $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{6}$, et la somme se lit $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exemples

- $\frac{3}{7} + \frac{2}{21} = \frac{9}{21} + \frac{2}{21} = \frac{11}{21}$, car $21 = 7 \times 3$.
- $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$.
- $\frac{2}{5} + \frac{3}{15} = \frac{6}{15} + \frac{3}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Remarque

Quand aucun dénominateur n'est multiple de l'autre, leur **produit** convient toujours : $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6}{24} + \frac{4}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$. Il reste alors à simplifier.

Notation

Un nombre entier s'écrit aussi en fraction : $1 = \frac{16}{16}$, $3 = \frac{3}{1} = \frac{15}{5}$. C'est ce qui permet de le mêler à un calcul de fractions.

V - Problèmes

Exemple — Le partage d'un gâteau

Albert prend $\frac{1}{2}$ du gâteau, Bernard $\frac{1}{8}$, Camille $\frac{3}{16}$. Que reste-t-il pour Danielle ?

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{16} = \frac{16}{16} - \frac{8}{16} - \frac{2}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{16}.$$

Il reste $\frac{3}{16}$ du gâteau.

Exemple — Un disque dur

Un tiers de l'espace sert aux vidéos, un sixième aux images, un vingt-quatrième aux logiciels. Quelle fraction reste libre ?

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} &= \frac{24}{24} - \frac{8}{24} - \frac{4}{24} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

Un peu moins de la moitié de l'espace est libre.

Méthode 4 — Résoudre un problème de fractions

1. Repérer à quoi correspond le « tout », c'est-à-dire le 1 : le gâteau entier, l'espace disque, la journée.
2. Écrire toutes les parts avec un même dénominateur.
3. Effectuer les additions et soustractions, puis simplifier.
4. Revenir à l'énoncé : la fraction obtenue répond-elle à la question posée ?

Remarque

Deux fractions ne se comparent, ne s'ajoutent et ne se retranchent que si elles portent sur le **même** tout. La moitié d'une petite pizza n'est pas la moitié d'une grande.

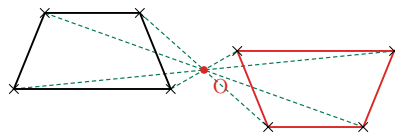
Chapitre 10

Symétrie centrale

I - Le demi-tour

Définition 1

Deux figures sont **symétriques par rapport à un point O** si, en faisant pivoter le plan d'un demi-tour autour de O , elles se superposent. Le point O est le **centre de symétrie**, et cette transformation s'appelle la **symétrie centrale** de centre O .

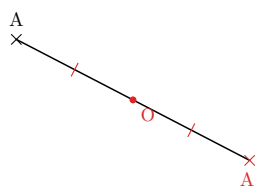


la figure rouge est l'image de la noire par le demi-tour de centre O

Fig. 51. – Chaque sommet et son image sont alignés avec O , de part et d'autre.

Théorème-Définition 1

Le **symétrique** d'un point A par rapport à O est l'unique point A' tel que O soit le **milieu** du segment $[AA']$.



O est le milieu de $[AA']$

Fig. 52. – A' est le symétrique de A par rapport à O : $OA = OA'$, et les trois points sont alignés.

Remarque

Le symétrique de O par rapport à O est O lui-même : c'est le seul point qui ne bouge pas.

Pour mieux comprendre

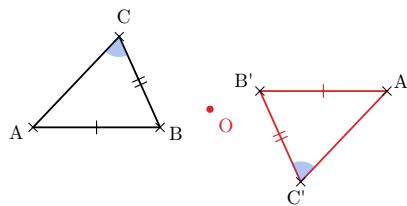
La symétrie axiale retourne la figure comme dans un miroir ; la symétrie centrale la fait pivoter d'un demi-tour, sans la retourner. Une figure et son image par une symétrie centrale se lisent « à l'envers », comme une carte à jouer.

II - Propriétés du demi-tour

Propriété 1 — Conservation

La symétrie centrale conserve :

- la **nature** des figures : le symétrique d'un carré est un carré, celui d'un cercle un cercle de même rayon ;
- les **longueurs** : le symétrique d'un segment de 5 cm est un segment de 5 cm ;
- les **mesures des angles** : le symétrique d'un angle de 90° est un angle de 90° ;
- les **aires** et l'alignement des points.

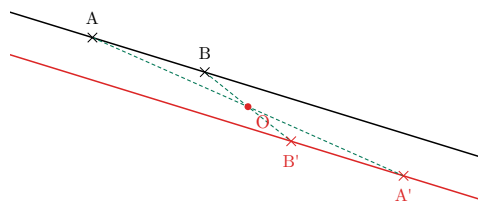


longueurs et angles sont conservés

Fig. 53. – Les côtés codés de la même façon ont la même longueur, et l'angle marqué garde sa mesure.

Propriété 2 — Lien avec le parallélisme

L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est **parallèle**.



l'image d'une droite est une droite parallèle

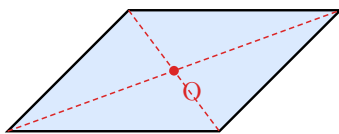
Fig. 54. – $(A'B')$, image de (AB) , lui est parallèle.

Remarque

C'est une différence nette avec la symétrie axiale, où l'image d'une droite n'est en général pas parallèle à la droite de départ.

Définition 2

Un point O est un **centre de symétrie** d'une figure si la figure est sa propre image par le demi-tour de centre O .



point d'intersection des diagonales est centre de symétrie

Fig. 55. – Le parallélogramme a un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales.



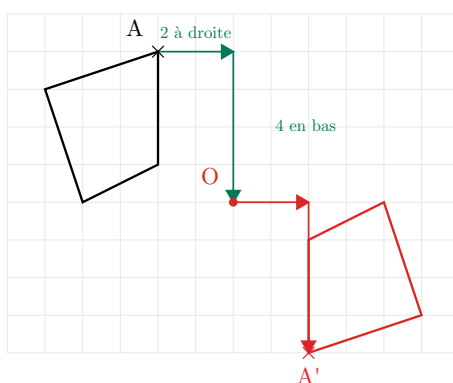
un triangle n'a jamais de centre de symétrie

Fig. 56. – Un triangle n'a pas de centre de symétrie.

III - Construire des symétriques

Protocole — Sur quadrillage

1. Compter le déplacement qui mène du point au centre : tant de carreaux horizontalement, tant de carreaux verticalement.
2. Repartir du centre et refaire exactement le même déplacement, en continuant dans le même sens.
3. Recommencer pour chaque sommet, puis relier les images dans le même ordre.



on refait de l'autre côté du centre le chemin qui mène au centre

Fig. 57. – Le chemin qui va de A à O se prolonge de l'autre côté, à l'identique : on arrive en A' .

Protocole — Sans quadrillage, à la règle et au compas

1. Tracer la demi-droite $[AO)$.
2. Reporter au compas la longueur OA à partir de O , sur cette demi-droite, au-delà de O : on obtient A' .
3. Recommencer pour chaque sommet de la figure.

Méthode 1 — Tirer parti des propriétés

Tous les sommets ne demandent pas le même travail : puisque les longueurs sont conservées et que les droites deviennent des droites parallèles, il suffit souvent de construire deux ou trois points, puis de terminer la figure en reportant les longueurs connues.

Exemple

Pour construire l'image d'un segment $[AB]$, il suffit de construire A' et B' , puis de les relier : l'image du segment est le segment $[A'B']$, de même longueur, porté par une droite parallèle à (AB) .

Chapitre 11

Programmation par blocs

I - Instructions, séquences, entrées et sorties

Définition 1

Une **instruction** est un ordre élémentaire, compris sans ambiguïté par la machine. Une **séquence** est une suite d'instructions exécutées **dans l'ordre**, de haut en bas.

Vocabulaire

Dans un langage de programmation par blocs, chaque instruction est un bloc. Les blocs s'emboîtent verticalement : l'empilement **est** l'ordre d'exécution.

Définitions

- Les **entrées** d'un programme sont les informations qu'il reçoit de l'extérieur : une valeur saisie, un clic, un nombre au hasard.
- Les **sorties** sont ce qu'il produit : un affichage, un dessin, un son.



l'entrée est la réponse saisie ; la sortie est ce que le programme dit

Fig. 58. – Un programme qui demande un côté, calcule le périmètre d'un carré, puis l'affiche :
l'entrée est la réponse saisie, la sortie est le nombre dit.

Définition 2

Une **variable** est une case mémoire portant un nom, dans laquelle le programme range une valeur pour la réutiliser plus tard.

Remarque

L'instruction « mettre x à 7 » n'est pas une égalité mathématique : c'est un ordre de rangement. La valeur précédente de x est perdue.

Méthode 1 — Analyser un programme donné

1. Repérer ses entrées : que doit-on lui fournir ?
2. Exécuter la séquence pas à pas, en notant après chaque bloc la valeur de chaque variable.
3. Lire la sortie obtenue et la confronter à ce qu'on attendait.

Exemple

Avec le programme ci-dessus et la réponse 7 :

Après l'instruction	côté	périmètre
mettre côté à la réponse	7	—
mettre périmètre à (côté × 4)	7	28
dire périmètre	7	28

La sortie est 28.

II - Formules et expressions informatiques

Définition 3

Une **expression informatique** est la traduction d'une formule mathématique dans le langage : les nombres, les variables et les opérateurs y sont emboîtés les uns dans les autres.

Exemples

Formule	Expression en blocs
$P = 4 \times c$	(côté × 4)
$P = 2 \times (L + l)$	(2 × (longueur + largeur))
$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$	((base × hauteur) / 2)

Remarque

Les blocs d'opération ne connaissent pas les priorités : l'ordre des calculs est celui de l'emboîtement. Ce sont les blocs eux-mêmes qui jouent le rôle des parenthèses.

Méthode 2 — Prévoir la valeur d'une expression

1. Remplacer chaque variable par sa valeur actuelle.
2. Évaluer les blocs les plus intérieurs d'abord, puis remonter.
3. Comparer ensuite avec ce que le programme affiche : un écart signale une erreur d'emboîtement.

Exemple

Avec longueur = 8 et largeur = 3, l'expression (2 × (longueur + largeur)) vaut :

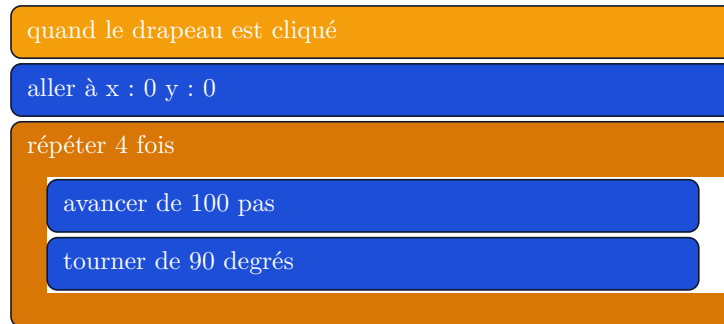
$$2 \times (8 + 3) = 2 \times 11 = 22.$$

Emboîtée autrement, ((2 × longueur) + largeur) vaudrait 19 : ce ne serait plus le périmètre.

III - Boucle inconditionnelle

Définition 4

Une **boucle inconditionnelle** répète une séquence d'instructions un nombre de fois fixé à l'avance : « répéter n fois ».



la boucle exécute quatre fois de suite les deux mêmes instructions

Fig. 59. – Les deux instructions placées dans la boucle sont exécutées quatre fois de suite : le lutin trace un carré.

Méthode 3 — Repérer ce qui se répète

1. Écrire la séquence complète, sans boucle.
2. Repérer le motif qui revient à l'identique, et compter combien de fois.
3. Remplacer les répétitions par une boucle « répéter n fois » contenant ce seul motif.

Exemple

Pour tracer un carré, la séquence « avancer, tourner » revient quatre fois : huit blocs deviennent une boucle de deux blocs. Pour un triangle équilatéral, ce serait « répéter 3 fois : avancer de 100 ; tourner de 120 degrés », car $360 \div 3 = 120$.

Propriété 1

Pour tracer un polygone régulier à n côtés, on répète n fois « avancer, puis tourner de $360 \div n$ degrés » : le lutin fait un tour complet.

Remarque

Modifier le seul paramètre n change entièrement le dessin sans toucher au reste du programme. C'est tout l'intérêt d'une boucle : le motif est écrit une fois, exécuté autant de fois qu'on veut.

Chapitre 12

Calcul littéral : expressions

I - Produire des formules

Définition 1

Une **expression littérale** est un calcul contenant des nombres et des lettres. Chaque lettre, appelée **variable**, désigne un nombre qui peut changer.

Convention — Écriture

Le signe $\times$ est facultatif devant une lettre ou une parenthèse :

- ab signifie $a \times b$;
- $3a$ signifie $3 \times a$;
- $3(a + 2)$ signifie $3 \times (a + 2)$.

En revanche, il reste indispensable entre deux nombres : 3×5 ne s'écrit pas 35.

Exemple

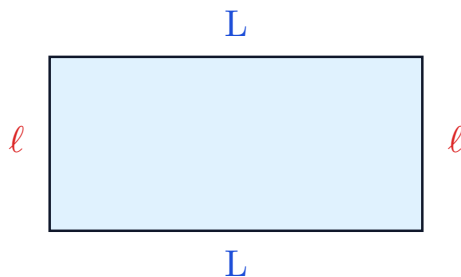
$3a + 2b$ est une expression littérale à deux variables, composée de deux multiplications et d'une addition.

Méthode 1 — Produire une formule

1. Nommer par une lettre la grandeur qui peut varier.
2. Écrire, avec cette lettre, les opérations décrites par l'énoncé.
3. Vérifier la formule sur un cas particulier connu.

Exemples

- Le double d'un nombre n : $2n$; son triple : $3n$.
- Le successeur de n : $n + 1$; son prédécesseur : $n - 1$.
- Le périmètre d'un carré de côté c : $4c$.
- Le périmètre d'un rectangle de dimensions L et l : $2(L + l)$.
- L'aire d'un triangle de base b et de hauteur h : $\frac{b \times h}{2}$.



$$= L + l + L + l = 2 L + 2 l = 2 (L +$$

Fig. 60. – Le périmètre s'écrit de plusieurs façons, toutes égales : c'est la même longueur.

Exemple — Un programme de calcul

« Choisir un nombre, le multiplier par 3, puis ajouter 5 ». En notant x le nombre choisi, le programme s'écrit d'un trait : $3x + 5$.

II - Substituer et tester une égalité

Définition 2

Évaluer une expression, ou **substituer**, c'est remplacer chaque lettre par une valeur donnée, puis effectuer les calculs.

Méthode 2 — Substituer sans se tromper

1. Réécrire l'expression en remettant les signes $\times$ sous-entendus.
2. Remplacer chaque lettre par sa valeur, entre parenthèses si elle est négative.
3. Effectuer en respectant les priorités opératoires.

Exemples

- $3a + 8$ pour $a = 4$: $3 \times 4 + 8 = 12 + 8 = 20$.
- $3a + 8$ pour $a = -2$: $3 \times (-2) + 8 = -6 + 8 = 2$.
- $2(L + l)$ pour $L = 8$ et $l = 3$: $2 \times (8 + 3) = 22$.

Définition 3

Tester une égalité, c'est vérifier si elle est vraie pour une valeur particulière de la variable, en calculant séparément chacun de ses deux **membres**.

Méthode 3

1. Remplacer la lettre par la valeur dans le membre de gauche, et calculer.
2. Faire de même avec le membre de droite.
3. Conclure : l'égalité est vraie pour cette valeur si les deux résultats sont égaux, fausse sinon.

Exemple

Tester $2(x + 3) = 2x + 6$ pour $x = 4$:

- membre de gauche : $2 \times (4 + 3) = 2 \times 7 = 14$;
- membre de droite : $2 \times 4 + 6 = 8 + 6 = 14$.

L'égalité est vraie pour $x = 4$.

Exemple

Tester $5x = 3x + 2$ pour $x = 1$, puis pour $x = 4$:

- pour $x = 1$: 5 d'un côté, $3 + 2 = 5$ de l'autre : **vraie** ;
- pour $x = 4$: 20 d'un côté, $12 + 2 = 14$ de l'autre : **fausse**.

Remarque

Un test ne prouve rien de général : une égalité vraie pour une valeur peut être fausse pour une autre. En revanche, une seule valeur qui la met en défaut suffit à montrer qu'elle n'est pas toujours vraie.

III - Sommes, produits, développer et réduire

Méthode 4 — Reconnaître la nature d'une expression

Une expression littérale est une **somme** ou un **produit** selon la dernière opération qu'on y effectuerait.

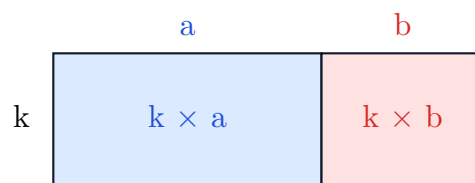
Exemples

- $3x + 5$ est une **somme** de deux termes : $3x$ et 5.
- $3(x + 5)$ est un **produit** de deux facteurs : 3 et $(x + 5)$.
- $2a + 3b$ est une somme ; $2ab$ est un produit.

Propriété 1 — Distributivité

Pour tous nombres k , a et b :

$$k(a + b) = ka + kb \quad \text{et} \quad k(a - b) = ka - kb.$$



$$k(a + b) = ka + kb$$

Fig. 61. – L'aire du grand rectangle se lit $k(a + b)$ ou $ka + kb$: ce sont deux écritures de la même aire.

Définitions

- **Développer** une expression, c'est transformer un produit en somme.

- **Factoriser**, c'est l'inverse : transformer une somme en produit, en mettant en évidence un facteur commun.

Exemples — Développer

- $4(x + 3) = 4x + 12.$
- $5(2a - 7) = 10a - 35.$
- $x(x + 2) = x \times x + 2x.$

Exemples — Factoriser

- $3x + 3y = 3(x + y).$
- $7a - 21 = 7(a - 3).$
- $x + x \times 5 = x(1 + 5) = 6x.$

Propriété 2 — Réduire

Deux termes qui contiennent la même lettre s'ajoutent :

$$ax + bx = (a + b)x.$$

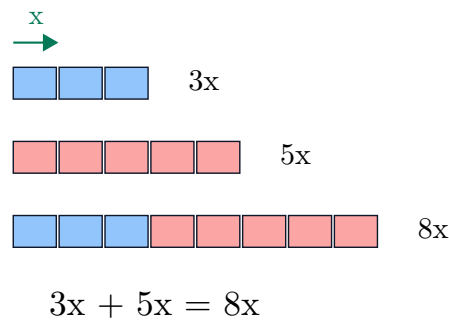


Fig. 62. – Trois longueurs x puis cinq longueurs x font huit longueurs x .

Exemples

- $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x.$
- $7a - 2a = (7 - 2)a = 5a.$
- $4,5x + 1,5x = 6x.$
- $4x + 3 + 2x + 5 = 6x + 8.$

Remarque

On ne réduit que des termes **semblables** : $3x + 5$ ne se réduit pas, car $3x$ et 5 ne comptent pas la même chose. De même, $2a + 3b$ reste tel quel.

IV - Démontrer, réfuter, conjecturer

Méthode 5 — Démontrer une propriété générale

Pour prouver qu'une propriété vaut pour **tous** les nombres, on nomme le nombre par une lettre, on traduit l'énoncé en expression littérale, puis on transforme cette expression jusqu'à la forme annoncée.

Exemple

« La somme de deux entiers consécutifs est impaire. » Soit n un entier. Les deux entiers consécutifs s'écrivent n et $n + 1$, et

$$n + (n + 1) = 2n + 1.$$

Or $2n$ est pair, donc $2n + 1$ est impair, quel que soit n . La propriété est démontrée.

Exemple

« Le programme : choisir un nombre, lui ajouter 3, multiplier par 2, puis enlever le double du nombre choisi, donne toujours 6. »

$$2(x + 3) - 2x = 2x + 6 - 2x = 6.$$

Le résultat ne dépend plus de x : c'est bien toujours 6.

Méthode 6 — Réfuter par un contre-exemple

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit d'exhiber **une seule** valeur qui la met en défaut : c'est un **contre-exemple**.

Exemple

« $5x = 3x + 2$ pour tout nombre x » est fausse : pour $x = 4$, on obtient $20 \neq 14$. Un seul contre-exemple suffit.

Remarque

Vérifier une affirmation sur trois exemples ne la démontre pas ; trouver un seul contre-exemple la réfute définitivement. Les deux démarches n'ont pas du tout la même portée.

Protocole — Conjecturer avec un tableur ou un algorithme

1. Faire calculer l'expression pour de nombreuses valeurs de la variable.
2. Observer une régularité dans la colonne des résultats : c'est la **conjecture**.
3. La démontrer ensuite par le calcul littéral — l'ordinateur suggère, il ne prouve pas.

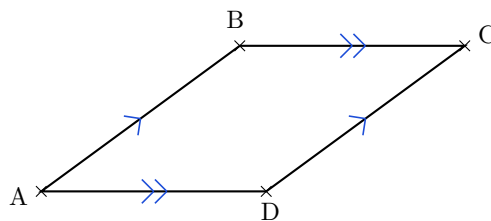
Chapitre 13

Parallélogrammes

I - Définition et constructions

Définition 1

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont **parallèles** deux à deux.



$$(AB) // (DC) \text{ et } (AD) // (BC)$$

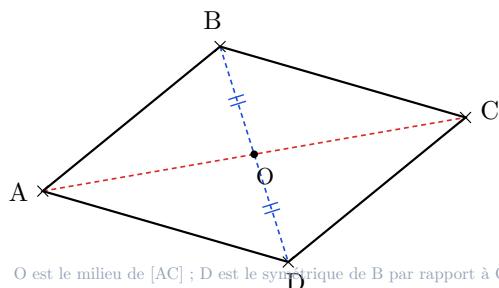
Fig. 63. – (AB) est parallèle à (DC) , et (AD) est parallèle à (BC) .

Propriété 1

Un parallélogramme a un **centre de symétrie** : le point d'intersection de ses diagonales. Il est sa propre image par le demi-tour autour de ce point.

Protocole — Construire un parallélogramme à partir de trois sommets

1. Tracer la diagonale joignant deux sommets opposés, par exemple $[AC]$.
2. Placer son milieu O .
3. Construire le symétrique du troisième sommet B par rapport à O : c'est le quatrième sommet D .



O est le milieu de $[AC]$; D est le symétrique de B par rapport à O

Fig. 64. – D est le symétrique de B par rapport à O , milieu de $[AC]$.

Protocole — Au compas, avec les longueurs

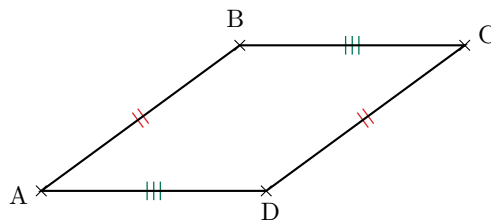
1. Tracer le côté $[AB]$.
2. Tracer un arc de centre B , de rayon AD , et un arc de centre D , de rayon AB .

3. Leur intersection donne le quatrième sommet C .

II - Propriétés caractéristiques

Propriété 2 — Côtés opposés

Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la **même longueur**.

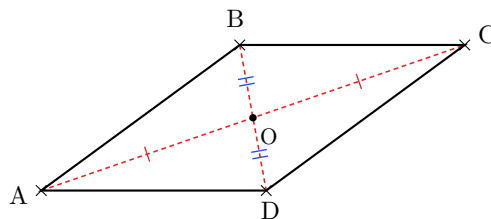


les côtés opposés ont la même longueur

Fig. 65. – $AB = DC$ et $AD = BC$.

Propriété 3 — Diagonales

Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur **milieu**.

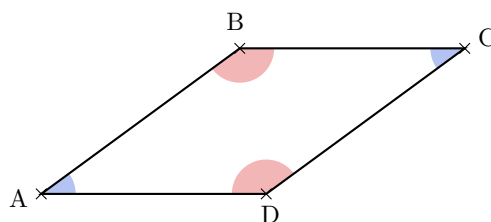


les diagonales se coupent en leur milieu

Fig. 66. – O est à la fois le milieu de $[AC]$ et celui de $[BD]$.

Propriété 4 — Angles

- Les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure.
- Deux angles consécutifs sont supplémentaires : leur somme vaut 180° .
- La somme des quatre angles vaut 360° .



les angles opposés sont égaux ; deux angles consécutifs sont supplémentaires

Fig. 67. – Les angles de même couleur sont égaux ; deux angles voisins totalisent 180° .

Théorème 1 — Propriétés caractéristiques

Un quadrilatère non croisé est un parallélogramme **si et seulement si** l'une de ces conditions est vérifiée :

- ses côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
- ses côtés opposés ont deux à deux la même longueur ;
- ses diagonales se coupent en leur milieu ;
- deux de ses côtés opposés sont à la fois parallèles et de même longueur.

Méthode 1 — Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

1. Choisir, parmi les propriétés caractéristiques, celle dont l'hypothèse est déjà donnée dans l'énoncé.
2. Écrire ce que l'on sait, puis la propriété utilisée, puis la conclusion.

Exemple

On sait que

$ABCD$ est un quadrilatère non croisé dont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O .

Or

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Donc

$ABCD$ est un parallélogramme.

Remarque

L'hypothèse « non croisé » n'est pas un détail : deux segments de même longueur peuvent aussi former un quadrilatère croisé, qui n'est pas un parallélogramme.

III - Parallélogrammes particuliers

Définition 2

Un **rectangle** est un parallélogramme qui a un angle droit.

Démonstration — Les quatre angles d'un rectangle sont droits

On sait que

$ABCD$ est un parallélogramme et $\widehat{DAB} = 90^\circ$.

Or

Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux et deux angles consécutifs sont supplémentaires.

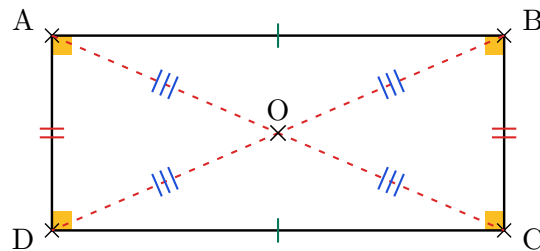
Donc $\widehat{BCD} = 90^\circ$, puis $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$: les quatre angles sont droits.**Propriété 5**Les diagonales d'un rectangle ont la **même longueur**, et se coupent en leur milieu.

Fig. 68. – Le rectangle : quatre angles droits, des diagonales égales qui se coupent en leur milieu.

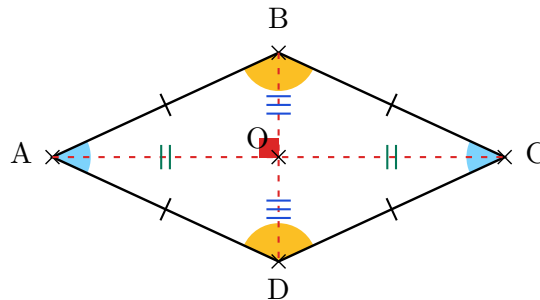
Définition 3Un **losange** est un parallélogramme dont tous les côtés ont la même longueur.**Propriété 6**Les diagonales d'un losange sont **perpendiculaires**, et se coupent en leur milieu. Elles sont aussi ses axes de symétrie.

Fig. 69. – Le losange : quatre côtés égaux, des diagonales perpendiculaires.

Définition 4Un **carré** est à la fois un rectangle et un losange : il hérite de toutes leurs propriétés.**Propriété 7**

Les diagonales d'un carré sont de même longueur, perpendiculaires, et se coupent en leur milieu.

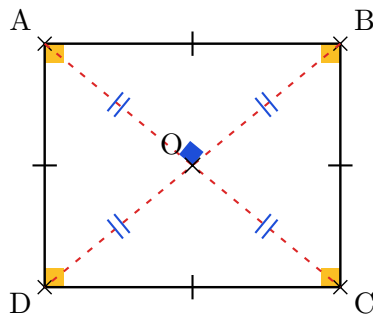


Fig. 70. – Le carré cumule les propriétés du rectangle et celles du losange.

Méthode 2 — Donner la nature d'un quadrilatère

1. Établir d'abord que c'est un parallélogramme.
2. Chercher ensuite l'élément qui le spécialise : un angle droit en fait un rectangle, deux côtés consécutifs égaux (ou des diagonales perpendiculaires) en font un losange, les deux à la fois un carré.

IV - Aire d'un parallélogramme et conversions

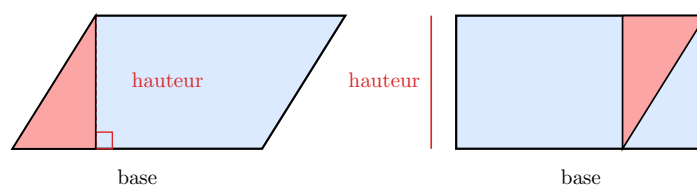
Formule

$$\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = \text{base} \times \text{hauteur}$$

où la hauteur est la distance entre la base et le côté qui lui est parallèle.

Pour mieux comprendre

En découpant le triangle qui dépasse d'un côté et en le recollant de l'autre, le parallélogramme devient un rectangle de même base et de même hauteur : l'aire n'a pas changé.



$$\text{aire du parallélogramme} = \text{base} \times \text{hauteur}$$

Fig. 71. – Découper, recoller : le parallélogramme devient un rectangle.

Formules

- $\mathcal{A}_{\text{carré}} = c \times c$
- $\mathcal{A}_{\text{rectangle}} = L \times l$
- $\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$
- $\mathcal{A}_{\text{losange}} = \frac{D \times d}{2}$, où D et d sont les diagonales

Exemple

Un parallélogramme de base 7,5 cm et de hauteur 4 cm a pour aire

$$7,5 \times 4 = 30 \text{ cm}^2.$$

Remarque

La hauteur n'est **pas** la longueur du côté oblique : c'est la distance perpendiculaire entre les deux côtés parallèles.

Méthode 3 — Aire d'une figure complexe

1. Découper la figure en carrés, rectangles, triangles et parallélogrammes.
2. Calculer l'aire de chaque morceau.
3. Additionner — ou soustraire, si un morceau est un trou.

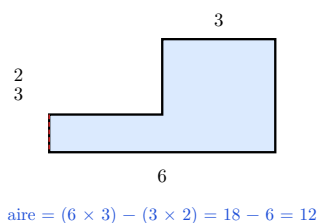


Fig. 72. — Une figure complexe se ramène toujours à des figures connues.

Notation — Unités de longueur

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
----	----	-----	---	----	----	----

Chaque colonne vers la droite multiplie par 10.

Exemples

- 85 cm = 850 mm.
- 5 m = 0,005 km.
- 3,2 dam = 320 dm.

Notation — Unités d'aire

km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
-----------------	-----------------	------------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Chaque colonne vers la droite multiplie par 100 : deux chiffres par colonne, et non un seul.

Exemples

- 1,5 m² = 15 000 cm².
- 0,02 hm² = 0,000 2 km².
- 10 ha = 100 000 m², car 1 ha = 1 hm².

Remarque

L'erreur la plus fréquente est de convertir une aire comme une longueur : 1 m^2 vaut $10\,000 \text{ cm}^2$, et non 100. Un carré de 1 m de côté contient bien 100×100 carrés de 1 cm de côté.

Chapitre 14

Puissances : carré et cube

I - Notation

Définitions

Pour un nombre a :

- $a^2 = a \times a$, qui se lit « a au **carré** » ;
- $a^3 = a \times a \times a$, qui se lit « a au **cube** ».

Le petit chiffre écrit en haut à droite est l'**exposant** : il indique combien de fois le nombre est utilisé comme facteur.

Pour mieux comprendre

Ces noms viennent de la géométrie : $a \times a$ est l'aire d'un carré de côté a , et $a \times a \times a$ le volume d'un cube d'arête a .

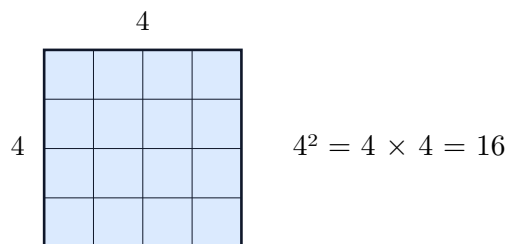


Fig. 73. – Un carré de côté 4 contient $4 \times 4 = 16$ carrés unité : $4^2 = 16$.

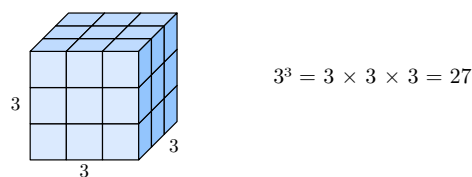


Fig. 74. – Un cube d'arête 3 contient $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubes unité : $3^3 = 27$.

Exemples

- $4^2 = 4 \times 4 = 16$.
- $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.
- $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.
- $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$.

Remarque

Les parenthèses comptent : $(-4)^2 = 16$, alors que $-4^2 = -16$, car dans la seconde écriture l'exposant ne porte que sur le 4.

II - Carrés et cubes à connaître

Propriété 1 — Les carrés des entiers de 0 à 12

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Et $0^2 = 0$.

Propriété 2

$10^2 = 100$ et $10^3 = 1\,000$: l'exposant compte les zéros.

Définition 1

Un **carré parfait** est le carré d'un entier : 1, 4, 9, 16, 25... Reconnaître un carré parfait, c'est reconnaître qu'un nombre peut s'écrire n^2 .

Méthode 1 — Écrire un nombre sous forme de puissance

Chercher dans le tableau des carrés, ou décomposer en facteurs : un nombre qui s'écrit $a \times a$ est a^2 ; un nombre qui s'écrit $a \times a \times a$ est a^3 .

Exemples

- $49 = 7 \times 7 = 7^2$.
- $1\,000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$.
- $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$; $0,25 = 0,5 \times 0,5 = 0,5^2$.

III - Calculer avec des puissances

Propriété 3 — Priorité

Dans un enchaînement d'opérations, les **puissances** se calculent avant les multiplications et les divisions, donc avant les additions et les soustractions — mais après les parenthèses.

Méthode 2

1. Effectuer les calculs entre parenthèses.
2. Calculer les carrés et les cubes.
3. Effectuer ensuite les multiplications et divisions, puis les additions et soustractions.

Exemples

- $3 + 4^2 = 3 + 16 = 19$, tandis que $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$.
- $5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$, tandis que $(5 \times 2)^3 = 10^3 = 1\,000$.
- $2 \times 3^2 - 4 = 2 \times 9 - 4 = 18 - 4 = 14$.
- $(1 + 2)^3 - 5^2 = 27 - 25 = 2$.

Remarque

2^3 et 3^2 ne sont pas égaux : $8 \neq 9$. L'exposant et la base ne s'échangent pas.

IV - Expressions littérales avec une puissance**Convention**

Avec des lettres, x^2 signifie $x \times x$, et $3x^2$ signifie $3 \times x \times x$: l'exposant ne porte que sur x , pas sur le 3. Pour élever le tout au carré, il faut écrire $(3x)^2$.

Méthode 3 — Évaluer une expression avec puissance

1. Remplacer la lettre par sa valeur, entre parenthèses si elle est négative.
2. Calculer la puissance en premier, puis le reste.

Exemples

- $x^2 + 1$ pour $x = 5$: $25 + 1 = 26$.
- $3x^2$ pour $x = 4$: $3 \times 16 = 48$, alors que $(3x)^2 = 12^2 = 144$.
- $x^3 - x$ pour $x = 2$: $8 - 2 = 6$.
- $x^2 + 2x$ pour $x = -3$: $9 + (-6) = 3$.

Exemples — Des formules avec puissances

- Aire d'un carré de côté c : $\mathcal{A} = c^2$.
- Volume d'un cube d'arête a : $V = a^3$.
- Aire d'un disque de rayon r : $\mathcal{A} = \pi \times r^2$.

Remarque

Doubler le côté d'un carré ne double pas son aire : elle est multipliée par $2^2 = 4$. Pour un cube, le volume est multiplié par $2^3 = 8$.

Chapitre 15

Probabilités

I - Vocabulaire du hasard

Définitions

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut pas prévoir lequel se produira.
- Une **issue** est l'un de ces résultats possibles.
- Un **évènement** est un ensemble d'issues, décrit par une phrase.

Exemple

Lancer un dé à six faces est une expérience aléatoire.

- Les issues sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
- « Obtenir un nombre pair » est un évènement, réalisé par les issues 2, 4 et 6.
- « Obtenir 7 » est un évènement **impossible** ; « obtenir un nombre inférieur à 10 » est un évènement **certain**.

Exemples — D'autres expériences aléatoires

- Lancer une pièce : deux issues, « pile » et « face ».
- Tirer une boule dans un sac opaque contenant des boules de couleurs.
- Faire tourner une roue partagée en secteurs.

Remarque

Une expérience n'est aléatoire que si le résultat n'est pas décidé d'avance : compter le nombre d'élèves présents dans la classe n'est pas une expérience aléatoire.

II - La probabilité d'un évènement

Définition 1

La **probabilité** d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'il se réalise : 0 pour un évènement impossible, 1 pour un évènement certain.

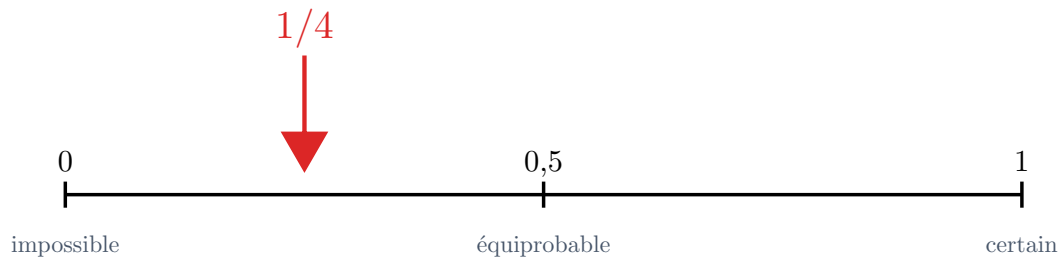


Fig. 75. – Toute probabilité se place sur cette droite, entre l'impossible et le certain.

Notation

La probabilité peut s'écrire sous forme de fraction, de nombre décimal ou de pourcentage : $\frac{1}{2}$, 0,5 et 50% désignent la même chance.

III - Équiprobabilité

Définition 2

Une situation est dite d'**équiprobabilité** lorsque toutes les issues ont la **même** chance de se produire.

Propriété 1

Dans une situation d'équiprobabilité à n issues, chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{n}$, et la probabilité d'un évènement est

$$P = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

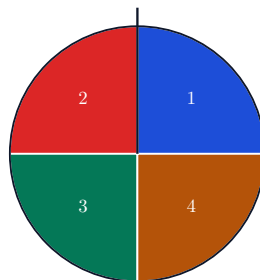


Fig. 76. – Des secteurs de même taille : chaque couleur a la même probabilité de sortir.

Exemples

- Avec un dé équilibré : $P(\text{obtenir } 4) = \frac{1}{6}$, et $P(\text{obtenir un nombre pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- Avec une pièce équilibrée : $P(\text{pile}) = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Dans un sac de 10 boules dont 3 rouges : $P(\text{rouge}) = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$.

Méthode 1 — Calculer une probabilité en situation d'équiprobabilité

1. Vérifier que toutes les issues ont bien la même chance : dé équilibré, pièce non truquée, boules indiscernables au toucher.

2. Compter le nombre total d'issues.
3. Compter les issues qui réalisent l'évènement.
4. Écrire le quotient, puis le simplifier.

Propriété 2

La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience vaut 1.

Remarque

L'équiprobabilité est une hypothèse, pas une évidence : un dé lesté ou une roue à secteurs inégaux n'y obéit pas, et le calcul par comptage ne s'applique plus.

IV - Expérimenter : effectifs et fréquences

Protocole — Répéter une expérience et enregistrer

1. Choisir l'expérience et la répéter un grand nombre de fois, dans les mêmes conditions.
2. Noter dans un tableau l'**effectif** de chaque issue.
3. Calculer la **fréquence** de chaque issue : son effectif divisé par le nombre total d'essais.
4. Comparer ces fréquences aux probabilités attendues.

Exemple

Une pièce lancée 200 fois :

Issue	Effectif	Fréquence	Probabilité
pile	104	0,52	0,5
face	96	0,48	0,5
Total	200	1	1

Propriété 3

Plus le nombre d'essais augmente, plus la fréquence observée d'un évènement se rapproche de sa probabilité. C'est ce qui donne un sens concret au nombre calculé.

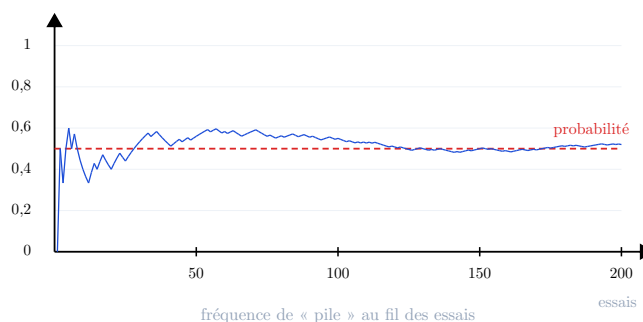


Fig. 77. – La fréquence de « pile » s'agite au début, puis se stabilise autour de 0,5.

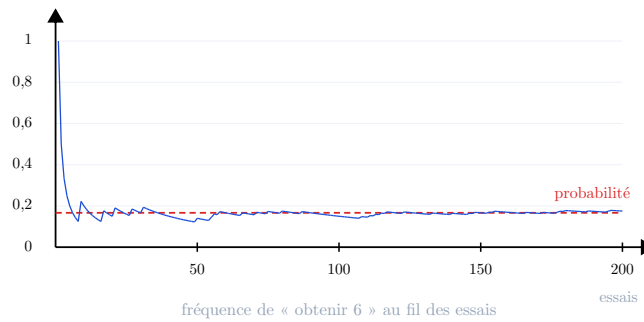


Fig. 78. – Même phénomène pour « obtenir 6 » avec un dé, autour de $\frac{1}{6} \approx 0,17$.

Remarque

Sur 10 lancers, obtenir 7 fois pile n'a rien d'anormal ; sur 10 000 lancers, ce serait très surprenant. Une probabilité ne prédit pas un résultat isolé : elle décrit ce qui se passe sur un grand nombre d'expériences.

Chapitre 16

Équations

I - La lettre comme inconnue

Définition 1

Une **équation** est une égalité contenant une lettre, dont on cherche la ou les valeurs qui la rendent vraie. Cette lettre s'appelle l'**inconnue**.

Définition 2

Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie. **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Remarque

La lettre n'a plus ici le même rôle que dans une formule. Dans $P = 4c$, la lettre c est une **variable** : elle prend toutes les valeurs qu'on veut. Dans $4c = 20$, c'est une **inconnue** : une seule valeur convient.

Méthode 1 — Vérifier qu'un nombre est solution

1. Remplacer l'inconnue par ce nombre dans le membre de gauche, et calculer.
2. Faire de même à droite.
3. Les deux résultats sont égaux : le nombre est solution. Sinon, il ne l'est pas.

Exemple

L'équation $x + 3 = 8$:

- pour $x = 5$: $5 + 3 = 8$ vrai, donc 5 est solution ;
- pour $x = 2$: $2 + 3 = 5 \neq 8$ faux, donc 2 n'est pas solution.

II - Mettre un problème en équation

Méthode 2

1. Choisir l'inconnue et la nommer : « soit x le nombre cherché ».
2. Préciser ce que x représente, avec son unité.
3. Traduire l'énoncé par une égalité entre deux expressions.
4. Résoudre l'équation, puis revenir à la question posée.

Exemple — Une opération à trou

« À quel nombre faut-il ajouter 3 pour obtenir 8 ? » Soit x ce nombre : l'énoncé se traduit par $x + 3 = 8$.

Exemple — Un prix

« 4 places de cinéma identiques coutent 34 €. Quel est le prix d'une place ? » Soit x le prix d'une place, en euros : $4x = 34$.

Exemple — Un périmètre

« Un rectangle a une largeur de 5 cm et un périmètre de 26 cm. Quelle est sa longueur ? » Soit x la longueur, en centimètres : $2(x + 5) = 26$, c'est-à-dire $x + 5 = 13$.

III - Résoudre par les opérations inverses**Pour mieux comprendre**

Une équation est une **balance en équilibre** : les deux plateaux ont le même contenu. Retirer la même chose des deux côtés, ou partager chaque côté par un même nombre, conserve l'équilibre.

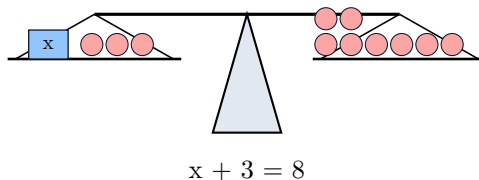


Fig. 79. — $x + 3 = 8$: la boîte inconnue et trois masses d'un côté, huit masses de l'autre.

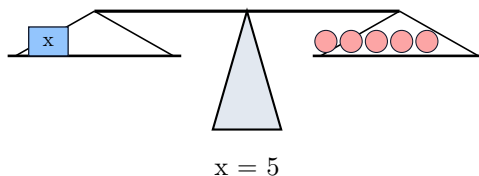


Fig. 80. — En retirant trois masses de chaque côté, l'équilibre est conservé : la boîte pèse 5.

Méthode 3 — Résoudre $x + b = c$

L'inverse de « ajouter b » est « soustraire b » : la solution est $x = c - b$.

Exemples

- $x + 3 = 8$ donne $x = 8 - 3 = 5$.
- $x + 12 = 7$ donne $x = 7 - 12 = -5$.
- $x - 4 = 9$ donne $x = 9 + 4 = 13$, car l'inverse de « soustraire 4 » est « ajouter 4 ».

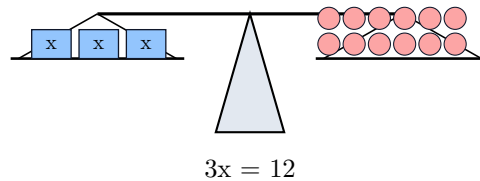


Fig. 81. – $3x = 12$: trois boîtes identiques équilibrent douze masses, donc chaque boîte en vaut 4.

Méthode 4 — Résoudre $ax = c$

L'inverse de « multiplier par a » est « diviser par a » : la solution est $x = \frac{c}{a}$, avec $a \neq 0$.

Exemples

- $3x = 12$ donne $x = \frac{12}{3} = 4$.
- $4x = 34$ donne $x = \frac{34}{4} = 8,5$.
- $\frac{x}{5} = 3$ donne $x = 3 \times 5 = 15$.

Méthode 5 — Vérifier sa solution

Toute résolution se termine par une vérification : on remplace l'inconnue par la valeur trouvée dans l'équation de départ, et on contrôle que l'égalité est vraie.

Exemple — Résolution complète

4 places de cinéma coûtent 34 €.

On sait que

Soit x le prix d'une place, en euros : $4x = 34$.

Donc

$$x = \frac{34}{4} = 8,5.$$

Vérification : $4 \times 8,5 = 34$ vrai. Une place coûte 8,5 €.

Remarque

Une équation peut n'avoir aucune solution ($x + 1 = x + 2$ n'est jamais vraie), ou en avoir une infinité ($x + 1 = 1 + x$ est toujours vraie). Celles rencontrées ici en ont exactement une.

Chapitre 17

Notion de fonction

I - L'expression « en fonction de »

Définition 1

Deux grandeurs sont **dépendantes** lorsqu'il existe un moyen — une formule, un tableau, un graphique — de calculer ou de lire la valeur de l'une à partir de la valeur de l'autre.

Notation

On dit alors que la première s'exprime **en fonction de** la seconde. L'ordre compte : c'est la grandeur qui **dépend** qu'on nomme en premier.

Exemples

- L'aire d'un disque s'exprime en fonction de son rayon : $\mathcal{A} = \pi \times r^2$.
- Le périmètre d'un carré s'exprime en fonction de son côté : $P = 4c$.
- Le prix payé à la pompe s'exprime en fonction du nombre de litres.
- La hauteur d'eau d'une rivière s'exprime en fonction du temps, sans qu'aucune formule ne la donne : la dépendance se lit sur un graphique.

Remarque

Toutes les dépendances ne se calculent pas. Une grandeur peut dépendre d'une autre par un tableau de mesures ou une courbe relevée, sans formule connue — la dépendance n'en est pas moins réelle.

Exemple

La température ressentie dépend **à la fois** de la température ambiante et de la vitesse du vent : une grandeur peut dépendre de plusieurs autres.

II - Tableaux de valeurs

Définition 2

Un **tableau de valeurs** range côte à côte les valeurs des deux grandeurs : une colonne par couple.

Méthode 1 — Produire un tableau à partir d'une formule

1. Choisir plusieurs valeurs de la grandeur dont tout dépend.
2. Appliquer la formule à chacune, en détaillant le calcul.
3. Ranger les résultats dans la seconde ligne du tableau.

Exemple

Périmètre d'un carré, $P = 4c$:

côté c (cm)	1	2	3	4	5
périmètre P (cm)	4	8	12	16	20

Méthode 2 — Lire un tableau de valeurs

Une colonne se lit comme une phrase : « quand le côté vaut 3 cm, le périmètre vaut 12 cm ». Entre deux colonnes, le tableau ne dit rien : il ne donne que les valeurs qu'il contient.

III - Graphiques cartésiens**Méthode 3 — Du tableau au graphique**

1. Choisir un repère, la grandeur dont tout dépend en abscisse, l'autre en ordonnée.
2. Graduer les deux axes en indiquant les grandeurs et leurs unités.
3. Placer un point par colonne du tableau.

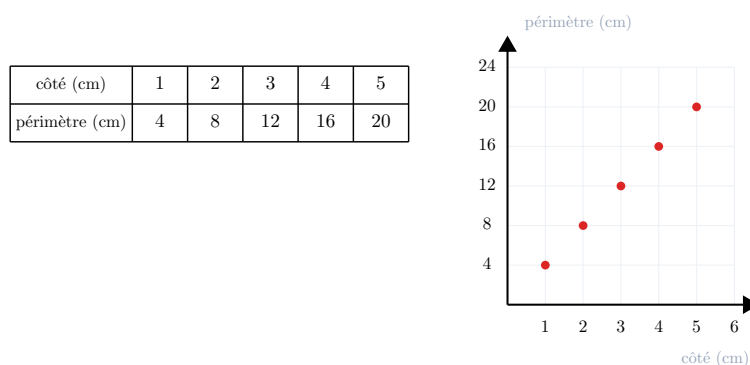


Fig. 82. — Chaque colonne du tableau devient un point du repère.

Méthode 4 — Lire un graphique

- D'une abscisse vers une ordonnée : monter à la verticale jusqu'à la courbe, puis lire à l'horizontale sur l'axe vertical.
- D'une ordonnée vers une abscisse : faire le chemin inverse.

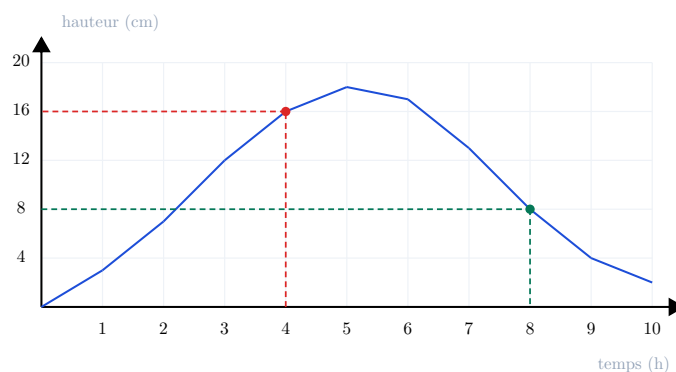


Fig. 83. — En rouge : à 4 h, la hauteur est de 16 cm. En vert : la hauteur vaut 8 cm à 8 h.

Remarque

Relier les points n'a de sens que si les valeurs intermédiaires existent : une hauteur d'eau varie à chaque instant, alors qu'un nombre d'élèves ne prend que des valeurs entières. Dans ce dernier cas, on laisse un **nuage de points**.

IV - Formules et proportionnalité

Méthode 5 — Produire une formule

1. Nommer par une lettre chacune des deux grandeurs.
2. Décrire par des opérations comment on obtient l'une à partir de l'autre.
3. Vérifier la formule sur une ou deux colonnes du tableau.

Exemples

- Un cahier coûte 2,5 € : le prix p de n cahiers est $p = 2,5 \times n$.
- Un taxi facture 4 € de prise en charge et 2 € par kilomètre : le prix p pour d kilomètres est $p = 4 + 2d$.
- L'aire d'un rectangle de largeur fixe 3 et de longueur L est $\mathcal{A} = 3L$.

Propriété 1 — Caractérisation graphique de la proportionnalité

Deux grandeurs sont proportionnelles si et seulement si les points du graphique sont **alignés** et si la droite passe par l'**origine** du repère.

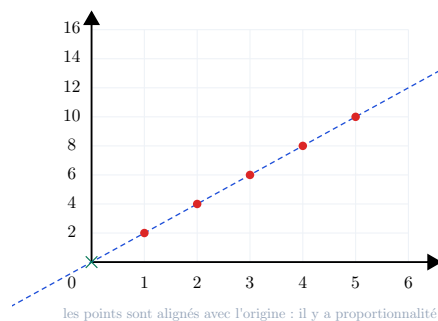


Fig. 84. – Alignés avec l'origine : les deux grandeurs sont proportionnelles.

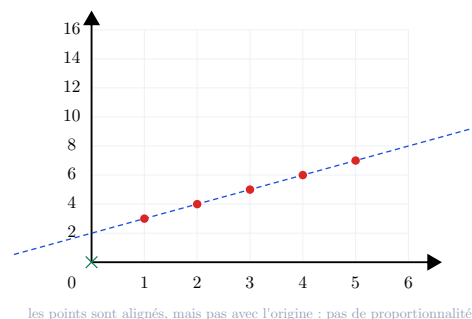


Fig. 85. – Alignés, mais la droite ne passe pas par l'origine : le prix du taxi n'est pas proportionnel à la distance.

Méthode 6 — Reconnaître la proportionnalité sur une formule

Une formule du type $y = k \times x$ traduit une proportionnalité ; dès qu'un terme s'ajoute, comme dans $y = k \times x + b$ avec $b \neq 0$, il n'y en a plus.

Exemple

$p = 2,5 n$: proportionnalité, la droite passe par l'origine — zéro cahier, zéro euro. $p = 4 + 2d$: pas de proportionnalité, car 0 kilomètre coûte déjà 4 €.

Chapitre 18

Espace : prismes et cylindres

I - Solides, perspective cavalière et patrons

Définitions

- Une **face** est une surface, plane ou courbe, qui délimite le solide.
- Une **arête** est un segment où deux faces se rejoignent.
- Un **sommet** est un point où plusieurs arêtes se rejoignent.
- Un **polyèdre** est un solide dont toutes les faces sont des polygones.

Remarque

La sphère, le cylindre et le cône ont des faces courbes : ce ne sont pas des polyèdres.

Définition 1

Un **prisme droit** est un solide dont les deux **bases** sont des polygones identiques et parallèles, et dont les faces latérales sont des rectangles.

Remarque

Le pavé droit est un prisme droit à base rectangulaire, et le cube un prisme droit à base carrée : ce sont des cas particuliers, pas des solides d'une autre espèce.

Définition 2

Un **cylindre de révolution** est un solide délimité par deux disques parallèles de même rayon — ses bases — et par une surface latérale courbe.

Convention — Perspective cavalière

- Les faces vues de face sont dessinées en **vraie grandeur**.
- Les arêtes parallèles dans la réalité restent parallèles sur le dessin.
- Les arêtes fuyantes sont tracées obliquement, et raccourcies.
- Les arêtes **cachées** se dessinent en **pointillés**.

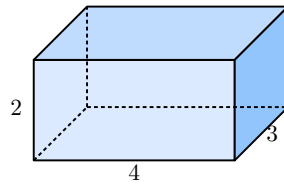
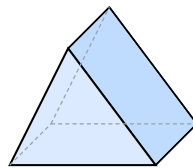


Fig. 86. – Un pavé droit en perspective cavalière : trois arêtes cachées, en pointillés.



base triangulaire

Fig. 87. – Un prisme droit à base triangulaire : les deux bases sont des triangles identiques, les trois faces latérales des rectangles.

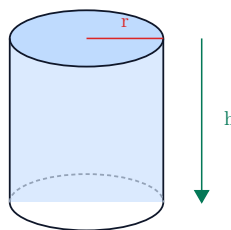
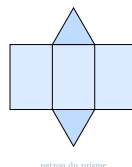


Fig. 88. – Un cylindre de révolution, de rayon r et de hauteur h : les disques se dessinent comme des ovales.

Définition 3

Un **patron** d'un solide est une figure plane qui, une fois découpée et pliée, reconstitue exactement ce solide.



patron du prisme

Fig. 89. – Le patron d'un prisme droit : les faces latérales mises bout à bout, et les deux bases rabattues.

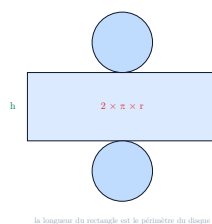


Fig. 90. – Le patron d'un cylindre : deux disques et un rectangle dont la longueur est le périmètre du disque, $2\pi r$.

Méthode 1 — Passer de la perspective au patron

1. Compter les faces du solide et reconnaître leur forme.
2. Relever les dimensions réelles de chacune — la perspective déforme, le patron non.
3. Disposer les faces en les faisant se toucher par des côtés de même longueur.

II - Unités de volume et de capacité

Définitions

- Le **volume** d'un solide est la mesure de l'espace qu'il occupe.
- La **capacité** est la mesure de ce qu'il peut contenir.

Convention

Le volume se mesure en mètres cubes (m^3) et ses sous-multiples ; la capacité en litres (L) et ses sous-multiples.

Propriété 1

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} \quad \text{et} \quad 1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L} \quad \text{et} \quad 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}.$$

Notation — Unités de volume

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
---------------	---------------	----------------	--------------	---------------	---------------	---------------

Chaque colonne vers la droite multiplie par 1 000 : trois chiffres par colonne.

Exemples

- $15 \text{ m}^3 = 15\,000\,000 \text{ cm}^3$.
- $2,5 \text{ dm}^3 = 2,5 \text{ L} = 2\,500 \text{ mL}$.
- $35 \text{ dL} = 3,5 \text{ L} = 0,0035 \text{ kL}$.

Remarque

Une longueur change de colonne par 10, une aire par 100, un volume par 1 000 : un chiffre, deux chiffres, trois chiffres. C'est la même logique, appliquée à une, deux, puis trois dimensions.

III - Volumes du cube, du pavé droit et du prisme droit

Formules

- $V_{\text{cube}} = a \times a \times a = a^3$
- $V_{\text{pavé droit}} = L \times l \times h$
- $V_{\text{prisme droit}} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$

Pour mieux comprendre

Un pavé droit se remplit de cubes unité : une couche en contient $L \times l$, et il y a h couches. Pour un prisme quelconque, la couche n'est plus un rectangle mais la base elle-même : d'où $\mathcal{A}_{\text{base}} \times h$.

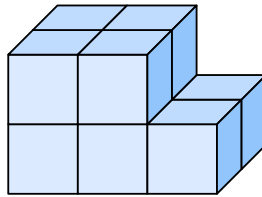


Fig. 91. – Compter les cubes unité, couche par couche : c'est ce que fait la formule.

Exemple

Un pavé droit de dimensions 5 cm, 3 cm et 4 cm a pour volume

$$V = 5 \times 3 \times 4 = 60 \text{ cm}^3,$$

soit 60 mL.

Exemple

Un prisme droit de hauteur 10 cm, dont la base est un triangle de base 6 cm et de hauteur 4 cm :

$$\mathcal{A}_{\text{base}} = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ cm}^2, \quad V = 12 \times 10 = 120 \text{ cm}^3.$$

Méthode 2 — Calculer un volume

1. Reconnaître la base du solide, et la hauteur qui lui est perpendiculaire.
2. Convertir toutes les longueurs dans la même unité.
3. Calculer l'aire de la base, puis la multiplier par la hauteur.
4. Donner le résultat avec l'unité de volume correspondante.

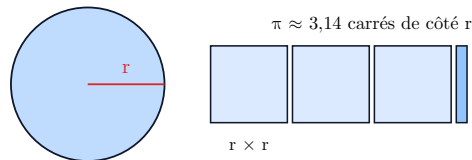
IV - Aire du disque et volume du cylindre

Formule

$$\mathcal{A}_{\text{disque}} = \pi \times r \times r = \pi r^2$$

Pour mieux comprendre

L'aire d'un disque de rayon r vaut un peu plus de trois carrés de côté r : exactement π d'entre eux.



$$\text{aire du disque} = \pi \times r \times r = \pi r^2$$

Fig. 92. – Le disque couvre $\pi \approx 3,14$ carrés de côté r .

Exemple

Aire d'un disque de rayon 5 cm :

$$\mathcal{A} = \pi \times 5 \times 5 = 25\pi \text{ cm}^2 \approx 78,54 \text{ cm}^2.$$

L'écriture 25π est la valeur **exacte** ; 78,54 en est une valeur approchée.

Exemple

Aire d'un quart de disque de rayon 8 cm :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \times \pi \times 8 \times 8 = 16\pi \text{ cm}^2 \approx 50,27 \text{ cm}^2.$$

Formule

$$V_{\text{cylindre}} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \pi r^2 \times h$$

Exemple

Un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 10 cm :

$$V = \pi \times 3 \times 3 \times 10 = 90\pi \text{ cm}^3 \approx 282,7 \text{ cm}^3,$$

soit environ 283 mL.

Remarque

Ne pas confondre le **périmètre** du disque, $2\pi r$, qui sert à tracer le patron, et son **aire**, πr^2 , qui sert à calculer un volume. L'un se mesure en centimètres, l'autre en centimètres carrés.