

Fractions : sens, repérage et comparaison

I - Partage de l'unité

Définition 1

Une **fraction** est un nombre composé d'un **numérateur** et d'un **dénominateur** :

$$\frac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}}$$

Le dénominateur dit en combien de parts égales on partage l'unité ; le numérateur dit combien de ces parts on prend.

Exemple

Dans $\frac{2}{3}$, le numérateur est 2 et le dénominateur est 3.

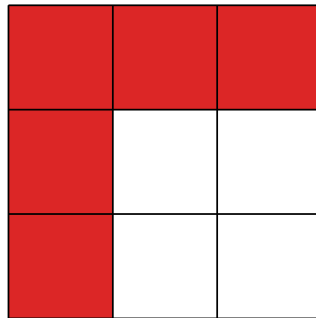


Fig. 1. – Le carré est partagé en 9 carreaux et 5 sont coloriés : la partie rouge vaut $\frac{5}{9}$ du carré.

II - Placer une fraction sur une droite graduée

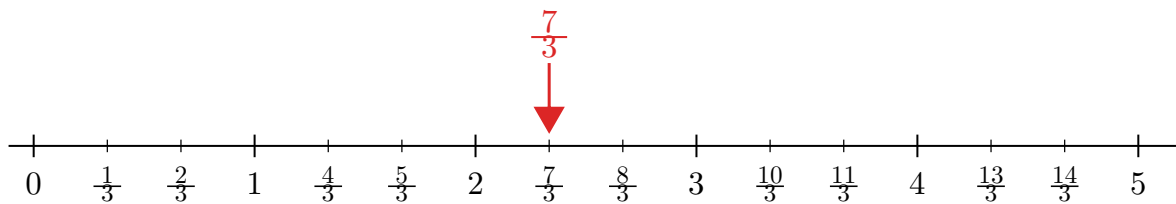


Fig. 2. – Chaque graduation vaut $\frac{1}{3}$ d'unité. La flèche pointe $\frac{7}{3}$, c'est-à-dire 7 tiers.

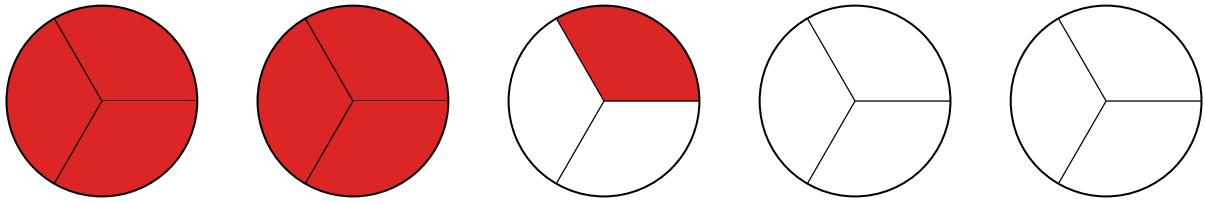


Fig. 3. – La même quantité, vue en parts de disque : $\frac{7}{3}$, c'est deux disques entiers et un tiers de plus.

Méthode 1 — Graduer un segment de longueur donnée

Pour graduer un segment $[AB]$ en cinquièmes :

1. partager $[AB]$ en 5 parts égales, au compas ou à la règle ;
2. chaque part vaut $\frac{1}{5}$; chaque point de partage porte le numérateur correspondant.

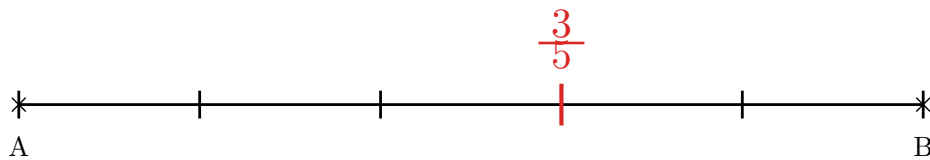


Fig. 4. – Le segment $[AB]$ partagé en cinquièmes : le point à 3 parts de A représente $\frac{3}{5}$.

III - Égalités de fractions

Propriété 1

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur **par le même nombre**, alors on obtient une deuxième fraction **égale** à la première.

Exemples

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9} \quad \frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$$

En simplifiant, dans l'autre sens :

$$\frac{54}{63} = \frac{6 \times 9}{7 \times 9} = \frac{6 \times \cancel{9}}{7 \times \cancel{9}} = \frac{6}{7}$$

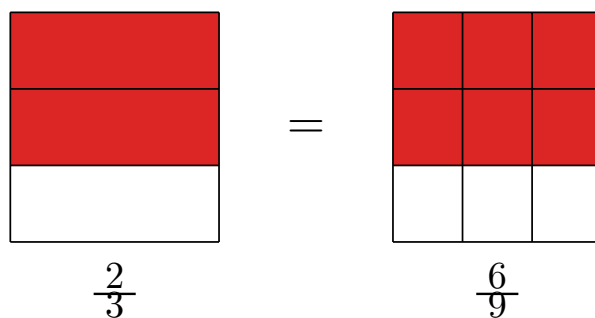


Fig. 5. – Le rectangle est coupé plus finement, mais l'aire rouge est la même : $\frac{2}{3}$ et $\frac{6}{9}$ désignent le même nombre.

Remarque

Le procédé marche dans les deux sens : en **divisant** numérateur et dénominateur par un même nombre, on **simplifie** la fraction.

IV - Comparer et encadrer des fractions

a) Comparer des fractions à 1

Propriété 2

- Une fraction est > 1 si numérateur $>$ dénominateur.
- Une fraction est < 1 si numérateur $<$ dénominateur.
- Une fraction est $= 1$ si numérateur $=$ dénominateur.

Exemples

$$\frac{3}{2} > 1 \text{ car } 3 > 2 \quad \frac{5}{7} < 1 \text{ car } 5 < 7 \quad \frac{4}{4} = 1$$

b) Comparer des fractions entre elles

Propriété 3

- Si deux fractions ont le **même dénominateur**, alors la fraction avec le plus **grand numérateur** est la plus grande.
- Si deux fractions ont le **même numérateur**, alors la fraction avec le plus **petit dénominateur** est la plus grande.

Exemples

$$\frac{4}{3} > \frac{2}{3}$$

car elles ont le même dénominateur et $4 > 2$;

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

car elles ont le même numérateur et $2 < 3$.

c) Encadrer une fraction

Méthode 2

Pour encadrer une fraction entre deux entiers consécutifs, on cherche les fractions de même dénominateur juste au-dessus et juste en dessous.

Exemple

Encadrer $\frac{10}{3}$ entre deux entiers consécutifs :

$$\frac{9}{3} < \frac{10}{3} < \frac{12}{3} \quad \text{donc} \quad 3 < \frac{10}{3} < 4$$

d) Ordonner une liste de fractions ou de nombres mixtes

Méthode 3

Pour ordonner une liste de fractions ou de nombres mixtes, on les compare deux à deux : à dénominateur commun entre fractions, ou en isolant la partie entière pour les nombres mixtes.

Exemple

Ranger $\frac{5}{4}$, $1\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ du plus petit au plus grand. Comme $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, il reste à comparer $\frac{3}{4}$ à $\frac{5}{4}$:

$$\frac{3}{4} < \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

V - Additionner et soustraire des fractions

Propriété 4

Pour additionner ou soustraire des fractions, il faut qu'elles aient le **même dénominateur**.

Méthode 4

On additionne ou on soustrait les numérateurs, et on **garde le même dénominateur**.

Exemples

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3} \quad \frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5} \quad \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = \frac{8+5}{9} = \frac{13}{9}$$

$$\frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7-3}{5} = \frac{4}{5} \quad \frac{11}{4} - \frac{6}{4} = \frac{11-6}{4} = \frac{5}{4}$$

VI - Multiplier une fraction par un entier

Méthode 5

Pour multiplier une fraction par un nombre entier, on multiplie le numérateur par cet entier et on garde le même dénominateur.

Exemples

$$3 \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5} \quad 4 \times \frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{7} = \frac{20}{7}$$

Remarque

Multiplier $\frac{2}{5}$ par 3, c'est ajouter trois fois $\frac{2}{5}$:

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 3 \times \frac{2}{5}$$

VII - Nombres mixtes**Définition 2**

Un **nombre mixte** est composé :

- d'un nombre entier ;
- d'une fraction < 1 .

Exemples

$$2\frac{1}{3} \quad 3\frac{4}{5} \quad 5\frac{1}{9}$$

Méthode 6 — Convertir un nombre mixte en fraction

On remplace l'entier par une fraction de même dénominateur, puis on additionne.

$$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$$

$$5\frac{1}{9} = 5 + \frac{1}{9} = \frac{45}{9} + \frac{1}{9} = \frac{46}{9}$$

Méthode 7 — Convertir une fraction en nombre mixte

On isole le plus grand nombre entier d'unités contenu dans la fraction.

$$\frac{7}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$\frac{19}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5}$$

$$\frac{46}{9} = \frac{45}{9} + \frac{1}{9} = 5 + \frac{1}{9} = 5\frac{1}{9}$$