

Triangles

Définition 1

Un **triangle** est une figure ayant 3 côtés et 3 angles.

I - Inégalité triangulaire

Illustration

Pour aller de A à B , le chemin direct est toujours le plus court : passer par C ne peut pas faire gagner de distance.

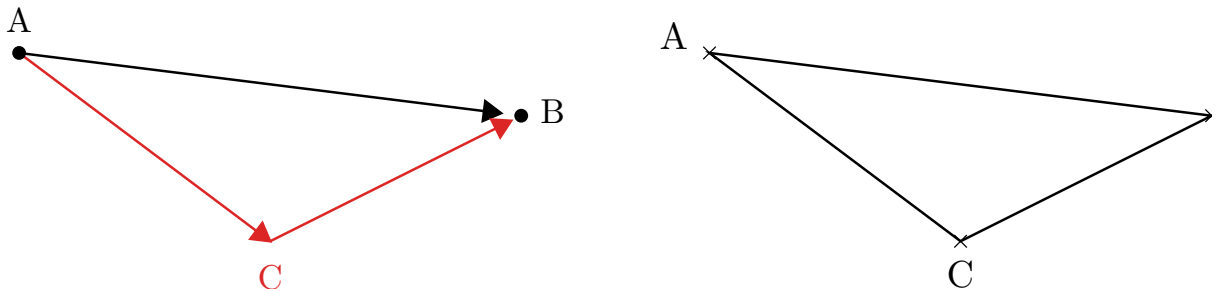


Fig. 1. – Le chemin noir est plus court que le rouge : $AB \leq AC + CB$.

Protocole — Activité au compas

1. Tracer un segment $[IJ]$ de 7 cm.
2. Essayer de construire un troisième sommet K tel que $IK = 5$ cm et $JK = 3$ cm, avec deux arcs de compas.
3. Recommencer avec $JK = 1$ cm : que se passe-t-il ?

Propriété 1

Un triangle ne peut être construit que si sa **plus grande longueur** est inférieure ou égale à la somme des deux autres.

Exemples

- Le triangle IJK avec $IJ = 7$ cm, $IK = 5$ cm et $JK = 3$ cm peut être construit, car $7 \leq 5 + 3$.
- Le triangle MNP avec $MN = 8$ cm, $MP = 6$ cm et $NP = 1$ cm ne peut pas être construit, car $8 > 6 + 1$.

II - Construire un triangle avec 3 longueurs

Protocole

1. Avec la règle, tracer le côté le plus long du triangle.
2. Avec le compas, tracer un arc de cercle de rayon égal à la longueur du deuxième côté.
3. Avec le compas, tracer un arc de cercle de rayon égal à la longueur du troisième côté.
4. Relier le point d'intersection des deux arcs aux deux extrémités du premier segment.

Exemple

Tracer ABC tel que $AB = 4$ cm, $AC = 2,4$ cm et $BC = 3,2$ cm.

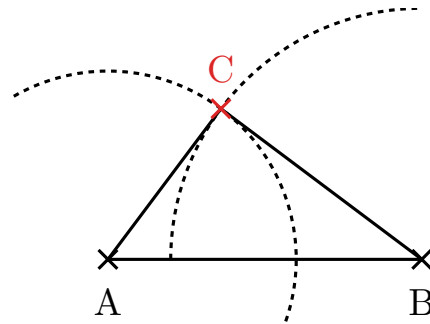


Fig. 2. – Le sommet C n'est pas choisi : il est imposé par le croisement des deux arcs.

1. Tracer $[AB]$ de longueur 4 cm.
2. Puisque $AC = 2,4$ cm, tracer un arc de cercle de centre A et de rayon 2,4 cm.
3. Puisque $BC = 3,2$ cm, tracer un arc de cercle de centre B et de rayon 3,2 cm.
4. Relier le point d'intersection à A et à B .

III - Construire un triangle avec 2 longueurs et 1 angle

Protocole

1. Avec la règle, tracer le côté le plus long du triangle.
2. Avec le rapporteur et la règle, tracer une demi-droite pour former l'angle donné.
3. Placer le troisième sommet sur cette demi-droite, à la deuxième longueur donnée.

Exemple

Tracer DEF tel que $DE = 4,8$ cm, $EF = 4,2$ cm et $\widehat{DEF} = 45^\circ$.

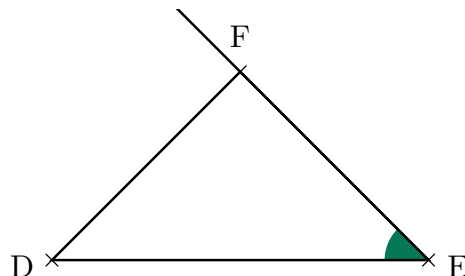


Fig. 3. – L'angle donne la direction ; la longueur donne le point.

IV - Construire un triangle avec 1 longueur et 2 angles

Protocole

1. Avec la règle, tracer la longueur donnée.
2. Avec le rapporteur et la règle, tracer une demi-droite formant le premier angle.
3. Avec le rapporteur et la règle, tracer une demi-droite formant le second angle. Le troisième sommet est leur point d'intersection.

Exemple

Tracer GHI tel que $GH = 4$ cm, $\widehat{GHI} = 60^\circ$ et $\widehat{HGI} = 30^\circ$.

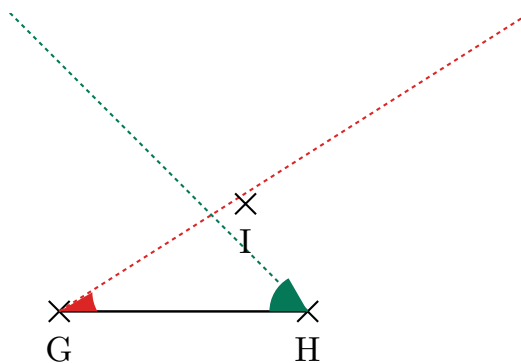


Fig. 4. – Les deux demi-droites se coupent en un seul point : le triangle est déterminé.

V - Les différents types de triangles

a) Triangle rectangle

Définition 2

Un **triangle rectangle** possède un angle droit.

Propriété 2

Ses deux angles aigus sont **complémentaires** : leur somme vaut 90° .

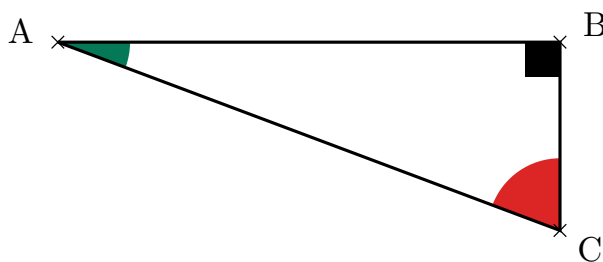


Fig. 5. – Le triangle ABC , rectangle en B .

Le triangle est **rectangle en B** , car l'angle droit est au sommet B . De plus, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAB}$ sont complémentaires.

b) Triangle isocèle

Définition 3

Un **triangle isocèle** possède deux côtés de même longueur. Le troisième côté est appelé la **base** du triangle.

Propriété 3

Les deux angles **adjacents à la base** sont égaux.

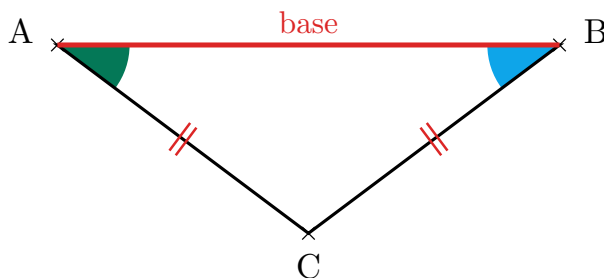


Fig. 6. – Le triangle ABC , isocèle en C : $[AB]$ est sa base.

Le triangle est **isocèle en C** , car les côtés $[CA]$ et $[CB]$ ont la même longueur. De plus, les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$ sont égaux.

c) Triangle équilatéral

Définition 4

Un **triangle équilatéral** possède 3 côtés de même longueur.

Propriété 4

Ses 3 angles sont égaux et mesurent chacun 60° .

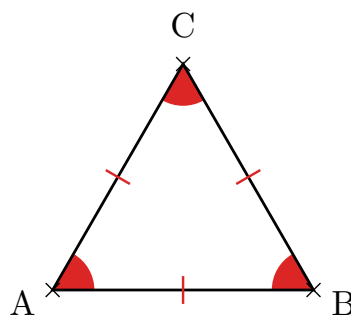


Fig. 7. – Trois côtés égaux, trois angles de 60° .

$$AB = AC = BC \quad \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB} = 60^\circ$$

VI - Somme des mesures des angles

Propriété 5

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

Exemple d'exercice.

1. Tracer le triangle IKJ tel que $\widehat{IJK} = 90^\circ$, $\widehat{IKJ} = 45^\circ$ et $JK = 4$ cm.
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{JIK}$?
3. Quelle est la nature du triangle IKJ ?

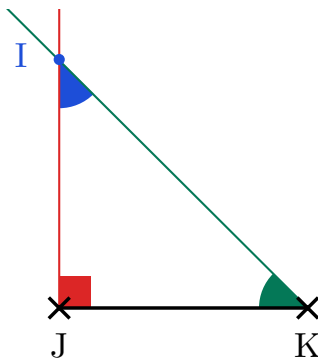


Fig. 8. – La construction demandée en question 1.

Exemple — Correction

Question 2. D'après la propriété :

$$\widehat{IJK} + \widehat{IKJ} + \widehat{JIK} = 180^\circ$$

On remplace par les valeurs connues :

$$90^\circ + 45^\circ + \widehat{JIK} = 180^\circ$$

$$135^\circ + \widehat{JIK} = 180^\circ$$

Pour résoudre cette addition à trou, on fait une soustraction :

$$\widehat{JIK} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

Question 3. Ce triangle possède un angle droit et deux angles de 45° : IKJ est donc un triangle **rectangle et isocèle**.

VII - Médiatrices d'un triangle et cercle circonscrit

Propriété 6

Les 3 médiatrices d'un triangle sont **concurrentes** : elles se coupent en un même point, centre du **cercle circonscrit** au triangle.

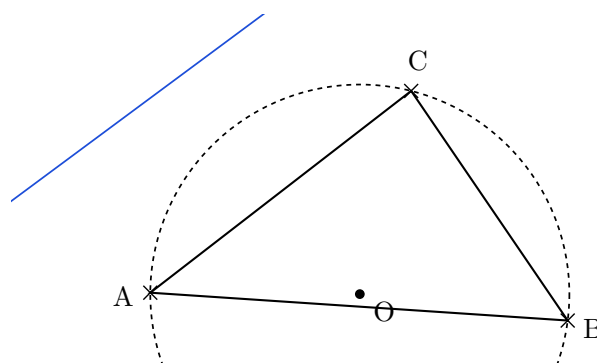


Fig. 9. – Le point O est équidistant des trois sommets : le cercle de centre O passe donc par A , B et C .

Démonstration

O est sur la médiatrice de $[AB]$, donc $OA = OB$. Il est aussi sur celle de $[BC]$, donc $OB = OC$. Par conséquent $OA = OB = OC$: le point O est à la même distance des trois sommets, et le cercle de centre O et de rayon OA passe par les trois.