

Division décimale et sens quotient d'une fraction

I - Poser une division décimale

Définition 1

Contrairement à la division euclidienne, la **division décimale** admet pour quotient un nombre décimal.

Méthode 1

Lorsque l'on effectue une division décimale :

- lorsqu'il n'y a plus de chiffre à abaisser, on peut ajouter au dividende autant de zéros que l'on veut après la virgule ;
- la division s'arrête lorsque le reste est égal à 0, **ou** que les restes se répètent en boucle.

Remarque

Ajouter des zéros après la virgule ne change pas le dividende : $253 = 253,000$. C'est ce qui autorise à continuer la division.

Exemple

$253 \div 8$: le reste devient nul après trois décimales.

$$\begin{array}{r}
 253,000 \mid 8 \\
 \underline{- 24} \\
 13 \\
 \underline{- 8} \\
 50 \\
 \underline{- 48} \\
 20 \\
 \underline{- 16} \\
 40 \\
 \underline{- 40} \\
 0
 \end{array}$$

Fig. 1. – $253 \div 8 = 31,625$. Les zéros gris ont été ajoutés au dividende pour poursuivre la division.

II - Quand la division ne s'arrête pas

Exemple

$200 \div 9$: le reste vaut 2 à chaque étape, et le chiffre 2 revient indéfiniment au quotient.

$$\begin{array}{r}
 200,000 \quad | \quad 9 \\
 \underline{- 18} \\
 20 \\
 \underline{- 18} \\
 20 \\
 \underline{- 18} \\
 20 \\
 \underline{- 18} \\
 20 \\
 \underline{- 18} \\
 20 \\
 \underline{- 18} \\
 2
 \end{array}$$

Fig. 2. – $200 \div 9 = 22,222\dots$: les restes se répètent, la division ne s'arrête jamais.

Définitions

Lorsque les restes d'une division décimale se répètent en boucle, on peut écrire le quotient de deux façons :

- sous forme de **fraction**, c'est sa **valeur exacte** ;
- sous forme décimale, en arrondissant, c'est une **valeur approchée**.

III - Arrondir un nombre décimal

Définition 2

Arrondir un nombre décimal, c'est le remplacer par un nombre proche plus simple, en ne conservant qu'un certain nombre de chiffres après la virgule.

Méthode 2

Pour arrondir à une position donnée :

1. repérer le **chiffre à garder** (unité, dixième, centième...) ;
2. regarder le **chiffre suivant** :
 - s'il est 0, 1, 2, 3 ou 4, rien ne change ;
 - s'il est 5, 6, 7, 8 ou 9, on ajoute 1 au chiffre à garder ;
3. effacer les chiffres situés après la position donnée.

Exemples

Arrondir	Nombre	Arrondi
à l'unité	34,27	≈ 34
à l'unité	34,57	≈ 35

Arrondir	Nombre	Arrondi
au dixième	12,34	$\approx 12,3$
au dixième	12,36	$\approx 12,4$
au centième	7,842	$\approx 7,84$

Remarque

On écrit $\approx$ et non $=$: un arrondi n'est pas égal au nombre de départ.

IV - Le quotient d'un entier par un entier

Définition 3

Le **quotient** de l'entier a par l'entier b non nul, noté $\frac{a}{b}$, est le nombre qui, multiplié par b , donne a :

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

V - Le sens quotient d'une fraction

Pour mieux comprendre

Partager une bande de longueur 1 en 4 parts égales, c'est construire un **guide-âne** : chaque partage vaut $\frac{1}{4}$ de la bande, et 3 parts valent $\frac{3}{4}$ — c'est-à-dire $3 \div 4$.

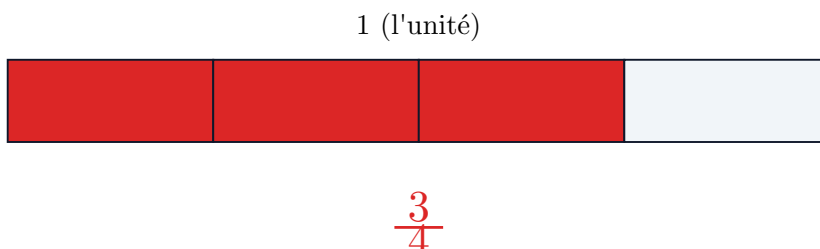


Fig. 3. – La bande partagée en 4 : 3 parts valent $\frac{3}{4}$, la valeur exacte de $3 \div 4$.

Exemples

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0,75 \quad \frac{253}{8} = 253 \div 8 = 31,625$$

$$\frac{7}{3} = 7 \div 3 = 2,333\dots$$

$$\begin{array}{r|l}
 3,00 & 4 \\
 - 28 & 0,75 \\
 \hline
 20 & \\
 - 20 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Fig. 4. – $3 \div 4 = 0,75$: ici la division s'arrête, la fraction $\frac{3}{4}$ est un nombre décimal.

Remarque

$\frac{3}{4}$ et $0,75$ désignent le même nombre. En revanche, $\frac{7}{3}$ n'est pas un nombre décimal : seule l'écriture fractionnaire en donne la valeur exacte.

VI - Égalités à trous multiplicatives

Méthode 3

Pour compléter une égalité du type $5 \times \square = 35$, on utilise le quotient : $\square = 35 \div 5$.

Exemples

$$5 \times \square = 35 \text{ donc } \square = 35 \div 5 = 7 \quad \square \times 8 = 3 \text{ donc } \square = 3 \div 8 = \frac{3}{8}$$

VII - Nature du nombre a/b

Propriété 1

Le nombre $\frac{a}{b}$ peut être :

- un **nombre entier**, si la division $a \div b$ tombe juste sur un entier ;
- un **nombre décimal non entier**, si la division $a \div b$ s'arrête après un ou plusieurs chiffres après la virgule ;
- un nombre **non décimal**, si la division $a \div b$ ne s'arrête jamais.

Exemples

Fraction	Division	Nature
$\frac{12}{4}$	$12 \div 4 = 3$	entier
$\frac{3}{4}$	$3 \div 4 = 0,75$	décimal non entier
$\frac{7}{3}$	$7 \div 3 = 2,333...$	non décimal